

ANALİZ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

- KÜMELER -

Küme = Bazı matematik varlıkların meydana getirdiği topluluk aşağıdaki koşulları sağlarsa buna küme denir.

- 1- Kümenin herhangi bir elemanı ya aynı ya da farklıdır.
- 2- Aynı matematik varlık bir küme aynı zamanda o kümenin bir elemanı olan.
- 3- Bir matematik varlığın kesinlikle hangi kümenin elemanı olduğunu bilmek gerekir.
- 4- Bütün kümelerin meydana getirdiği bir kümeden söz edilemez.

$$\{x\} \quad \{a, b, c\}$$

$$A, B, X, Y$$

$$\{1, 1, 2, 3\} \rightarrow \text{küme değil}$$

$$a \quad b \quad x \quad y$$

$$a \in A \quad a \notin A$$

Önermeler :

- 1- Ve : Bu önerme her ikisi anlamında kullanılır.

Örneğin, f fonksiyonu sürekli ve çift fonksiyondur.

- 2- Yeya : Önermelerden bir tanesi sağlanabildiği gibi ikisinde beraber sağlanabilir.

Örneğin, f fonksiyonu sürekli veya integrallenebilir.

$$\forall \text{ (Her)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exists \text{ (Öyleki)} \text{ vardır, bazı gibi bir anlamı vardır.}$$

Önermenin Değili :

$$P \rightarrow \text{değili } P'$$

Alt Küme :

$$X, A$$

$$\forall x \in A \rightarrow x \in X \Leftrightarrow A \subset X$$

İki Kümenin Eşitliği :

$$X \text{ ve } Y,$$

$$X \subset Y \text{ ve } Y \subset X \Leftrightarrow X = Y \text{ dir.}$$

Boş Küme :

Hiçbir elemanı olmayan kümeye denir.

Sonlu Elemanlı Küme :

Elementlerinin sayısı sonlu olan kümeye denir.

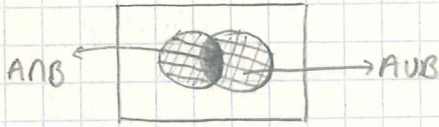
İki Kümenin Arakesiti ve Kesişimi.

A, B gibi iki tane küme verilmiş olsun. Bu iki kümenin arakesiti ;

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde tanımlanır. Birleşimi ise ;

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ veya } x \in B\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım : İki kümenin ara kesiti boş ise buna ayrık küme denir.



Alt Kümenin Tümleneni :

E bir küme ve $A \subseteq E$ ise

$C_E A \rightarrow A$ kümesinin E'ye göre tümleneni denir.

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ fakat } x \notin A\}$$



İki Kümenin Farkı :

$$A, B \quad A - B = \{x | x \in A \text{ fakat } x \notin B\}$$



$$B - A = \{x | x \in B \text{ fakat } x \notin A\}$$

Genelde $B - A \neq A - B$ dir.

$$A \Delta B = (B - A) \cup (A - B) \rightarrow A \text{ ile } B \text{ nin simetrik farkı.}$$

$P(X)$ Kuşet Kümesi :

Örnek // $X = \{a, b, c\}$ $P(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$

İki Kümenin Kartezyen (Dik) Çarpımı :

X ve Y küme olmak üzere, $X \times Y$ ile gösterilir. Şöyle tanımlanır.

$$X \times Y \text{ ikili } X \times Y = \{z | z = (x, y), x \in X, y \in Y\}$$

Özel Hal : 1) $X=Y$ ise

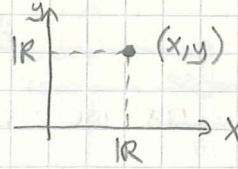
ör // $X=Y=\mathbb{R}$

243

$$X \times Y = X \times X = X^2$$

$$X \times Y = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$



Genelleştirme :

$X_1, X_2, \dots, X_n$ n tane küme olsun.

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{Z \mid Z = (X_1, X_2, \dots, X_n), X_1 \in X_1, X_2 \in X_2, \dots\}$$

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = X \quad X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ tane}} = X^n$$

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ tane}} = \mathbb{R}^n$$

Sayı Sistemleri :

Sayılar : $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I})$

1, 2, 3, ... Doğal sayılar $\rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{Sayma sayıları} \quad \mathbb{N} = \{x \mid x \text{ doğal sayı}\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$x+1=1 \Rightarrow x=0 \quad x+2=1 \Rightarrow x=-1$$

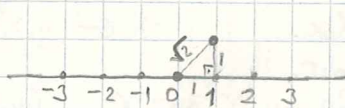
$$\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \underbrace{\{-1, -2, -3, \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}}_{\text{tamsayılar}}$$

Rasyonel Sayılar ($\mathbb{Q}$) : İki tamsayının oranı olarak kabul edilen sayılardır.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ rasyonel sayı}\} \quad x \in \mathbb{Q} \quad x = \frac{m}{n} \begin{matrix} \rightarrow \text{tamsayı} \\ \nearrow \\ n \neq 0 \end{matrix}$$

Reel (Gerçek) Sayılar ($\mathbb{R}$) :



$$x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} //$$

İrrasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{I}$) : Rasyonel ve irrasyonel sayı eksenini üzerindeki

bütün noktaların temsil ettikleri sayılara reel sayılar (gerçek sayılar) denir. Ve tüm

bu sayıların kümesi reel sayılardır.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Mutlak (=Salt) Değer :

Tanım : $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir. Ve,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ ise} \quad \begin{array}{l} \text{ör} // \quad x=3 \quad |x| = |3| = 3 \\ \quad \quad \quad x=-2 \quad |x| = |-2| = 2 \end{array}$$

Fonksiyonlar :

Tanım : X ve $Y \neq \emptyset$ olmak üzere, X 'in her elemanına karşılık, Y 'nin yalnız bir elemanı bulunuyorsa, bu şekildeki her f kuralına X 'ten Y 'ye bir fonksiyon denir ve

X ve $Y \neq \emptyset$ her $x \in X$ için bir tek $y \in Y$

her f kuralına, $x \xrightarrow{f} y$

X : tanım kümesi

$$f: X \rightarrow Y$$

Y : değer (görüntü) kümesi

Bir fonksiyonun grafiği, $x \rightarrow f(x)$

G_f ile gösterilir. $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

Örneğin; $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

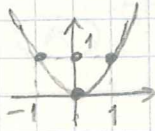
$$x \rightarrow f(x) = x^2 \quad G_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = x^2$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$x=1 \Rightarrow y=1$$

$$x=-1 \Rightarrow y=1$$



XXY

$$ACB \quad \forall a \in A \Rightarrow b \in B$$

$$a \in X \quad b \in Y (a, b)$$

$$G_f \subset XXY$$

Tanım : G, X ve Y kümeleri verilmiş olsun.

1- $G \subset XXY$ dir.

2- $\forall x \in X$ 'e karşılık ancak bir tek $y \in Y$ vardır.

(x, y) dir. Veya her $x \in X$ için (x, y) olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

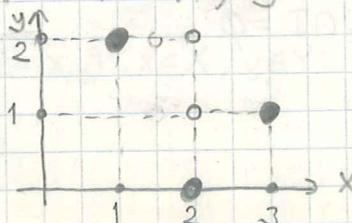
$f = (G, X, Y)$ üçlüsüne bir fonksiyon denir.

Örnek : $[1, 3]$ kapalı aralığında $\mathbb{R}$ sayılara giden bir fonksiyon aşağıdaki

şekilde tanımlanır.

$$x \xrightarrow{f} y \quad x \rightarrow f(x) = y$$

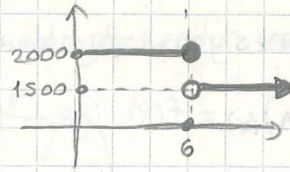
$$f(x) = \begin{cases} 2, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x = 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad x \in [1, 3] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



Örnek : 3 kişi çalışarak bir aileye 2000 lira gelir getiriyor. 6 ay sonra birisi ölüyor.

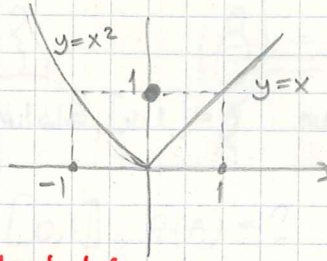
Ailenin geliri 1500 liraya düşüyor. Fonksiyon grafiğini çiziniz.

$$f(x) = \begin{cases} 2000 \text{ lira} & 0 \leq x \leq 6 \\ 1500 \text{ lira} & 6 < x \end{cases}$$



Örnek :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



Fonksiyonların Birleşimi :

$X, Y, Z \neq \emptyset$ olmak üzere $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ fonksiyonu için bir $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyona g ile f fonksiyonlarının birleşimi denir.

$$x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow Z \quad h: Z \rightarrow W$$

$$x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} z$$

$$(h \circ g \circ f): X \rightarrow W$$

$$f \circ g: X \rightarrow Z$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Genelleştirme : $X_1, X_2, \dots, X_n$ n tane küme olsun.

$$f_1: X_1 \rightarrow X_2 \quad f_2: X_2 \rightarrow X_3 \quad f_{n-1}: X_{n-1} \rightarrow X_n$$

$$(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1): X_1 \rightarrow X_n$$

NOT : $X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X$ ise $f^2: X \rightarrow X$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

Tanım : İz düşüm fonksiyonu

$$X \times Y \xrightarrow{\text{iz düşüm}} X$$

$\text{iz} d_1(X, y) = X \Rightarrow (X, y)$ ikilisini X 'e götüre 1. iz düşüm fonksiyonu

$$(X, y) \rightarrow X$$

$$X \times Y \xrightarrow{\text{iz} d_2} Y$$

$$(X, y) \rightarrow \text{iz} d_2(X, y) = y$$

$F(X, Y)$ X 'ten Y ye giden tüm fonksiyonların kümesi

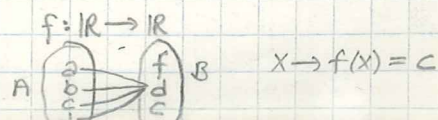
NOT : $X, Y \neq \emptyset$ olmak üzere $F(X, Y)$ ile X 'ten Y 'ye giden tüm fonksiyonların kümesini göstereceğiz.

Fonksiyon Çeşitleri :

Birim Fonksiyon : $X \xrightarrow{I_X} X$ $X \rightarrow I_X(x) = x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona denir.

Sabit Fonksiyon : $X \xrightarrow{f} Y$ ve X 'in her elemanına karşı C gibi bir sabit sayıya gidiyorsa, f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

$$X \xrightarrow{f} Y \quad x \rightarrow f(x) = C \in Y$$



Bir Fonksiyonun Kısıtlanması :

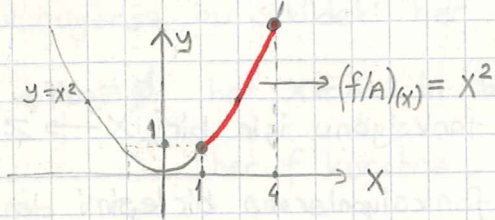
$$f: X \rightarrow Y \quad A \subset X$$

$f|_A: A \rightarrow Y$ bir fonksiyon tanımlayalım.

$\forall x \in A$ için $(f|_A)(x) = f(x)$ ise $f|_A$ fonksiyonuna f 'in A 'ya kısıtlanması ya da kısıtlanmış fonksiyon denir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = x^2$ olsun $A = [1, 4]$ alalım. $A = [1, 4] \subset \mathbb{R}$

$$f|_A: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f|_A)(x) = x^2$$



Bir Fonksiyonun Genişletilmesi :

X, Y iki küme, $A \subset X$ olsun. Ve $A \xrightarrow{g} Y$ veilsin.

$x \xrightarrow{f} Y$ varsa bu fonksiyonun A 'ya kısıtlanması eşitse bu taktirde f fonksiyonuna g 'nin genişletilmiş fonksiyonu denir.

NOT: Bir fonksiyonun genişletilmesi tek olmayabilir.

$$f: X \rightarrow Y \quad f|_A: A \rightarrow Y \quad \forall x \in A \text{ için } (f|_A)(x) = f(x)$$

Uyarı: $f: X \rightarrow Y \quad g: X \rightarrow Y \quad g \neq f \quad A \subset X$

$$f|_A: A \rightarrow Y \quad g|_A: A \rightarrow Y \quad \forall x \in A \text{ için } (f|_A)(x) = (g|_A)(x) \text{ olur.}$$

Çok Değişkenli Fonksiyonlar :

$X, Y, Z \neq \emptyset$ olmak üzere $X \times Y \rightarrow Z$ giden bir f fonksiyonu için

$(x, y) \rightarrow Z = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona 2 değişkenli fonksiyon denir.

$$X \times Y \times W \xrightarrow{f} Z, \quad (x, y, w) \rightarrow f(x, y, w) = Z$$

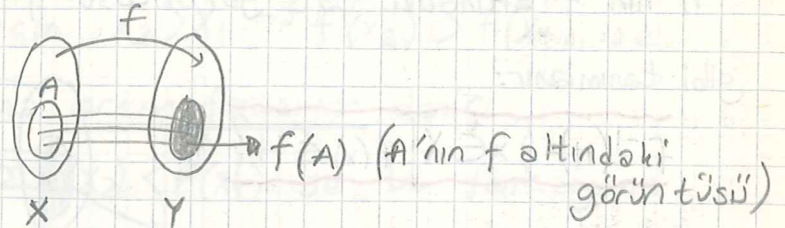
Genişletilmesi :

(Bir Alt Kümenin Görüntüsü :)

$X \xrightarrow{f} Y$, $A \subset X$ olsun,

A'nın f altındaki görüntüsü, $f(A)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır ;

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$



Örnek $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 1 \quad A = [0, 1] \quad f(A) = ?$$

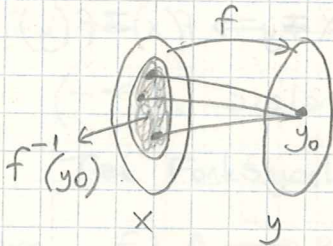
$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in [0, 1] \} = [-1, 0]$$

Ters Görüntü :

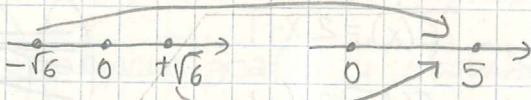
Tanım 1 : $X \xrightarrow{f} Y$, $y_0 \in Y$

Bu y_0 elemanının f ye göre ters görüntüsü, $f^{-1}(y_0)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır ;

$$f^{-1}(y_0) = \{ x \in X \mid f(x) = y_0 \}$$



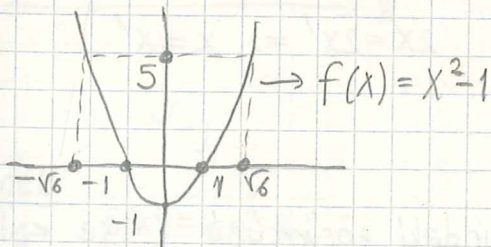
1. Örnek $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = y = x^2 - 1 \quad y_0 = 5 \quad y_0 \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(5) = ?$



Görüntüsü 5 olan

$$f^{-1}(5) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 5 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 5 \} = \{ -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \}$$

$$x^2 = 6 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6} \\ x_2 = -\sqrt{6}$$



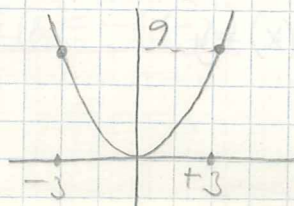
2. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = y = x^2$$

$$y_0 = 9 \Rightarrow f^{-1}(9)$$

$$f^{-1}(9) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 9 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9 \} = \{ -3, +3 \}$$



$$x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = -3$$

Genişletilmesi:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \xrightarrow{f} Z$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \longrightarrow f(X_1, X_2, \dots, X_n) = Z$$

Açıklama (Uyarı): X ve $Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$U, V, W \neq \emptyset$ ve $X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W$ geçen bir fonksiyon nasıl tanımlanır?

$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W$ giden fonksiyon nasıl değer alır?

(Sıralı ikiliden, üçlüye giden fonksiyon nasıl tanımlanır?)

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (u, v, w)$$

$$U \times V \times W \xrightarrow{\text{id}_1} U$$

$$(u, v, w) \longrightarrow \text{id}_1(u, v, w) = u$$

$$U \times V \times W \xrightarrow{\text{id}_2} V$$

$$(u, v, w) \longrightarrow \text{id}_2(u, v, w) = v$$

$$U \times V \times W \xrightarrow{\text{id}_3} W$$

$$(u, v, w) \longrightarrow \text{id}_3(u, v, w) = w$$

$$Z = (u, v, w)$$

$$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W \xrightarrow{\text{id}_1} U$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (u, v, w) = u$$

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$g: Y \longrightarrow Z$$

$$(g \circ f): X \longrightarrow Z$$

$$f_1 = (\text{id}_1 \circ f): X \times Y \longrightarrow U$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = u$$

$$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W \xrightarrow{\text{id}_2} V$$

$$f_2 = (\text{id}_2 \circ f) = f_2(x, y) = v$$

$$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W \xrightarrow{\text{id}_3} W$$

$$f_3 = (\text{id}_3 \circ f) = f_3(x, y) = w$$

$$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W = (f_1, f_2, f_3)$$

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

$$f = (f_1, f_2, f_3) //$$

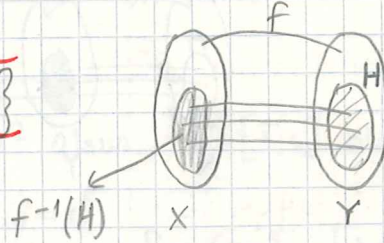
— o —

Bir Alt Kümenin Ters Görüntüsü

Tanım 2: $X \xrightarrow{f} Y$, $H \subset Y$ verilmiş olsun

H 'nin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(H)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f^{-1}(H) = \{x \in X \mid f(x) \in H\}$$



Örnek $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = x - x^2 \quad H = [0, +\infty) \quad f^{-1}(H) = ?$

$$f^{-1}(H) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - x^2 \in [0, +\infty)\} =$$

$$x(1-x) \geq 0$$

$$x > 0 \quad 1-x \geq 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$x(1-x)$	-	+	0	-

$$x - x^2 \geq 0$$

$$f^{-1}(H) = [0, 1]$$

Birebir Fonksiyon

Tanım 1 $f: X \xrightarrow{f} Y$ verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Tanım 2 $\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Örnek $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

$x^2 \neq x$ olsun

$$2x = 2x^2$$

$$2x + 1 = 2x^2 + 1$$

$$f(x) \neq f(x^2)$$

2.yol: $\forall x, x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x^2) = 2x^2 + 1$$

$$f(x) = f(x^2) \Rightarrow 2x + 1 = 2x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$2x = 2x^2 \Rightarrow x = x^2$$

Örten Fonksiyon

$$f: X \rightarrow Y$$

Tanım 1 $f(X) = Y$ Eğer tanım kümesinin f altındaki görüntüsü Y 'ye eşitse buna örten fonksiyon denir.

Tanım 2 $\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$

Eşitleyen Fonksiyon =

Birebir ve örten fonksiyona eşitleyen fonksiyon denir.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

1. Tanım $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ ise

$A \subset \mathbb{R}$ bu fonksiyona artan fonksiyon denir.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ ise bu fonksiyona azalan fonksiyon denir.

2. Tanım $\forall x_2', x_1' \in A$ için

$$\frac{f(x_2') - f(x_1')}{x_2' - x_1'} > 0$$

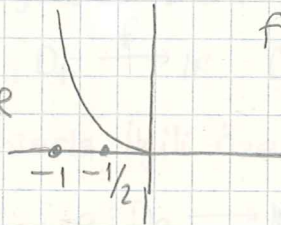
Bu fonksiyona 0 aralığında artan, aksi halde bu fonksiyona azalan fonksiyon denir.

Örnek

$$-1 < -1/2$$

$$A = [-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = x^2$$



$$f(-1) > f(-1/2)$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(-1/2) = (-1/2)^2 = 1/4 \quad x_2 > x_1$$

$(-\infty, 0]$ azalan $[0, \infty)$ artan

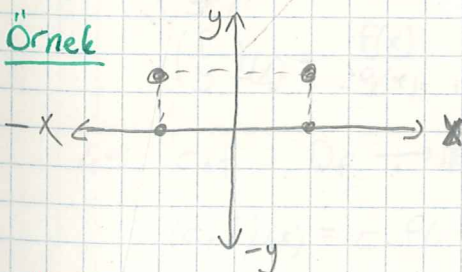
Tek Fonksiyonlar, Çift Fonksiyonlar

Tanım $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ eğer

$\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

Bu fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

Örnek



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Örnek

$$f(x) = \cos x$$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x) \quad \text{çift fonksiyondur.}$$

Tanım $\forall x \in A$ için $f(x) = -f(-x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Örnek $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = 2x$

$-f(-x) = -(-2x) = 2x = f(x)$

$f(x) = \sin x$

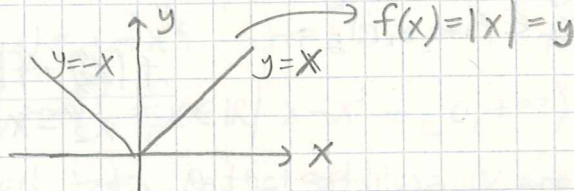
$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$

$-f(-x) = -(-\sin x) = \sin x = f(x)$

Tek bir fonksiyonun grafiği başlangıç noktasına göre simetriktir.

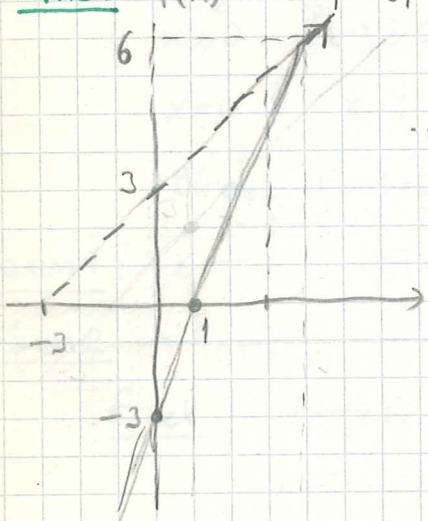
Mutlak Değer Fonksiyonu

Örnek $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



Örnek $f(x) = 2x - |x-3| = \begin{cases} 2x - x + 3 & x-3 \geq 0 & x \geq 3 \\ 2x + x - 3 & x-3 < 0 & x < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} x+3, & x \geq 3 \\ 3x-3, & x < 3 \end{cases}$



$f(x) = x+3 = y$

$x=0, y=3 \quad (0,3)$

$y=0, x=-3 \quad (-3,0)$

$f(x) = 3x-3 \quad f(3)=6$

$x=0, y=-3 \quad (0,-3)$

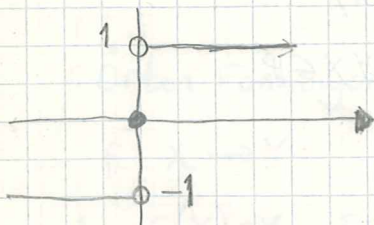
$y=0, x=1 \quad (0,1)$

İşaret Fonksiyonu

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Bu fonksiyona işaret fonksiyonu

denir. Ve Sgn ile gösterilir. $\text{Sgn}(x) = f(x)$



Tam Değer Fonksiyonu

$\llbracket x \rrbracket$ $n \leq x$ koşulunu sağlayan en büyük n tamsayıdır.

Örnek $-2 \leq x < -1 \quad \llbracket x \rrbracket = -2$

$\llbracket 1,75 \rrbracket = 1 \quad \llbracket 0,5 \rrbracket = 0 \quad \llbracket -\frac{1}{2} \rrbracket = -1$

$f(x) = [x]$ fonksiyonuna tam değer fonksiyonu denir.

$k \leq x < k+1$ ise $f(x) = k$ dir. $k \in \mathbb{R}$

Örnek

$$3 \leq x < 4 \quad [x] = 3$$

$$0 \leq x < 1 \quad [x] = 0$$

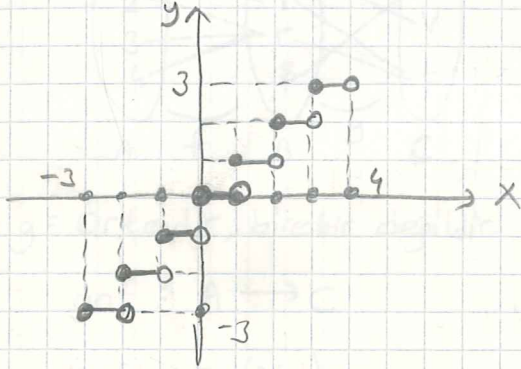
$$2 \leq x < 3 \quad [x] = 2$$

$$-1 \leq x < 0 \quad [x] = -1$$

$$1 \leq x < 2 \quad [x] = 1$$

$$-2 \leq x < -1 \quad [x] = -2$$

$$-3 \leq x < -2 \quad [x] = -3$$



$D_f = (f \text{ fonksiyonunun tanım kümesidir})$

$$f: X \rightarrow Y \quad D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad D_f \subseteq \mathbb{R}$$

Fonksiyonlarla ilgili Özellikler :

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} ; g: D_g \rightarrow \mathbb{R} , c \in \mathbb{R}$$

1- $f \mp g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$$

2- $f \cdot g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

3- $\left(\frac{f}{g}\right): D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4- $c \cdot f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

Uygulama :

Problem 1: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ise

$5f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarını bulunuz?

Çözüm // $D_g = \{x | g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

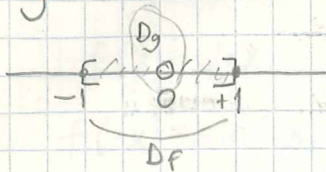
x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$-x^2+1$	-	0	0	-

$$D_f = [-1, 1]$$

$$D_f = [-1, 1]$$

• $f+g$:

$$D_f \cap D_g = [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$$



$$f+g: [-1, 0) \cup (0, 1]$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{x}$$

• $f-g: [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{x}$$

• $f \cdot g: [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{1-x^2}) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

• $\frac{f}{g}: [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{x}} = x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

• $5f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(5f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

Problem 2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 2, \quad x \mapsto g(x) = x^3$$

$$(g \circ f) = ? \quad (f \circ g) = ?$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2) = (x^2 - 2)^3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3)^2 - 2 = x^6 - 2$$

$$(f \circ g) \neq (g \circ f)$$

Soru // $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^3$ $(g \circ f) = ?$ $(f \circ g) = ?$

$$[-1, 1] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

(g \circ f)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) = (\sqrt{1-x^2})^3 \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{1-x^6}$$

Problem 3: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$B = \{p, q, r, s\}$$

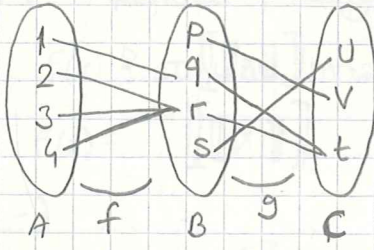
$$C = \{u, v, t\}$$

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonları

$$f = \{(1, q), (2, r), (3, r), (4, r)\}$$

$$g = \{(p, v), (q, t), (r, t), (s, u)\}$$
 biçiminde ise

$(g \circ f)$ fonksiyonunu ve bu fonksiyonun tanım kümesini bulunuz?



(Eğer A'dan bir eleman 2 kere diğer elemanlara gitsen fonksiyon değil, bağlantı olurdu)

g örten değildir, birebir değildir.

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)_1 = g(f(1)) = g(q) = t$$

$$(g \circ f)_2 = g(f(2)) = g(r) = t$$

$$(g \circ f)_3 = g(f(3)) = g(r) = t$$

$$(g \circ f)_4 = g(f(4)) = g(r) = t$$

Sabit fonksiyondur.

(Tanım kümesindeki tüm değerler değer kümesindeki bir değere gidiyor.)

Problem 4: $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ olduğuna göre,

$$g(a+b) \text{ ve } g(a) + g(b) = ?$$

$$g(a) = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$g(b) = b^2 + \frac{1}{b^2}$$

$$g(a+b) = (a+b)^2 + \frac{1}{(a+b)^2}$$

$$g(a) + g(b) = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$= \frac{a^4 + 1}{a^2} + \frac{b^4 + 1}{b^2}$$

$$g(a+b) = \frac{(a+b)^4 + 1}{(a+b)^2}$$

Problem 5: $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ise $\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a) \cdot \varphi(b)} = \frac{ab-1}{a+b}$

$$\varphi(a) = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\varphi(b) = \frac{b-1}{b+1}$$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \frac{a-1}{a+1} + \frac{b-1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1) + (b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)}$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{b-1}{b+1} = \frac{ab-a-b+1}{(a+1)(b+1)}$$

$$1 - \frac{ab-a-b+1}{(a+1)(b+1)} = \frac{ab+a+b+1-ab-a-b-1}{(a+1)(b+1)} = 1 - \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \frac{2a+2b}{(a+1)(b+1)}$$

$$\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a) \cdot \varphi(b)} = \frac{\frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)}}{\frac{2a+2b}{(a+1)(b+1)}} = \frac{2ab-2}{2a+2b} = \frac{2(ab-1)}{2(a+b)} = \frac{ab-1}{a+b} //$$

Problem 6: Aşağıdaki fonksiyonların tanım aralıklarını bulunuz?

⑤ $f(x) = \sqrt{1-2x-3x^2}$

④ $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}$

⑥ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

③ $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$

② $f(x) = \sqrt{1-2x-3x^2}$

$$1-2x-3x^2=0$$

$$3x^2+2x-1=0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

x	-1		1/3		
f(x)	-	0	+	0	-

[-1, 1/3]

③ $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}} = f(x)$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$3-x=0 \Rightarrow x=3$$

x	1		3	
x-1	-	0	+	+
3-x	+	+	0	-

[1, 3]

⑥ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

$$16-x^2 \geq 0 \text{ olmalı}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

x	-4		4		
f(x)	-	0	+	0	-

$(-4, 4)$

④ $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}$

$$4-x^2 \geq 0$$

$$1-x \geq 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x=1$$

x	-2		1		2	
4-x^2	-	0	+	+	0	-
1-x	+	+	0	-	-	-

$$[-2, 2] - \{1\} = [-2, 1) \cup (1, 2]$$

Problem 7: $f(x) = \frac{x}{|x|-x}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x), x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{x-x} = \frac{x}{0} = \text{Tanımsız}$$

$$f(x), x < 0 \Rightarrow \frac{x}{-x-x} = \frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2} \quad (-\infty, 0)$$

Problem 8: $f(x) = \frac{1}{\lfloor 2x \rfloor}$

$0 < x \leq 1$ $\lfloor x \rfloor = 0 //$

$1 < x \leq 2$ $\lfloor x \rfloor = 1$

Problem 9: Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz?

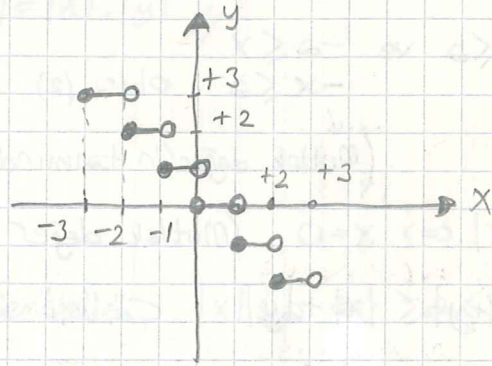
a- $f(x) = -\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$

b- $f(x) = \lfloor \lfloor |x| \rfloor \rfloor$

$\lfloor x \rfloor = k \Rightarrow k \leq x < k+1$

a-)

$$-\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \begin{cases} +3, & -3 \leq x < -2 \\ +2, & -2 \leq x < -1 \\ +1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x < 2 \\ -2, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



b-)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \\ -x, & x < 0, \lfloor \lfloor -x \rfloor \rfloor \end{cases}$$

- işareti varsa eşitlik yön değiştirir.

$-3 \leq x < -2 \Rightarrow 3 \leq -x < 2$

$\Rightarrow 2 \leq -x < 3 \Rightarrow f(x) = 2$

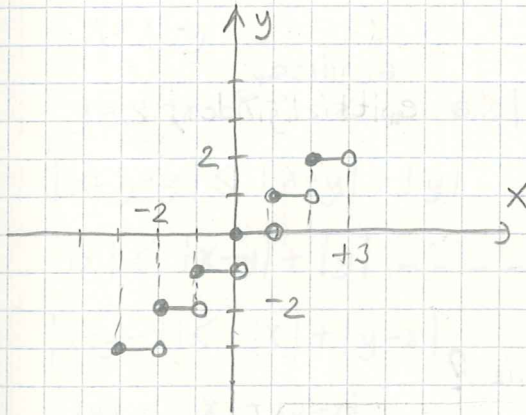
$-2 \leq x < -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$

$0 \leq -x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$

$-1 \leq -x < 0 \Rightarrow f(x) = -1$

$-2 \leq -x < -1 \Rightarrow f(x) = -2$

$-3 \leq -x < -2 \Rightarrow f(x) = -3$



Problem 10: $\forall x, y \in \mathbb{R}, a \geq 0$ ise

Aşağıdaki özellikleri ispatlayınız?

1- $|-x| = |x|$

2- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

3- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4- $-|x| \leq x \leq |x|$

5- $|x+y| \leq |x| + |y|$ Üçgen eşitsizliği

6- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

7- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

8- $|x|^2 = x^2$

①

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, & x > 0 \\ -x = -y, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x & -x > 0 \Rightarrow x < 0 \\ 0 & -x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -(-x) = x & -x < 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$|-x| = |x| //$

$x > 0 \quad x = x$

$x = 0 \quad 0 = 0$

$x < 0 \quad -x = -x //$

$$= \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

② $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Kabul edelim ki $|x| \leq a$ olsun.

$x \geq 0$ ise $x \leq a$ olur. ①

$x < 0$ ise $-x \leq a$ ve $x \geq -a$ ise $-a \leq x$ tir ②

1 ve 2 den $-a \leq x \leq a$ olur.

Tersine $-a \leq x \leq a$ olsun. Acaba $|x| \leq a$ midir?

(1) $x \leq a$ ve $-a \leq x$
 $-x \leq a$ olur. (2) buradan $\rightarrow |x| \leq a$ olur.
 (mutlak değer'in tanımından dolayı)

③ $|x| \Leftrightarrow x=0$ (mutlak değer tanımı gereğince aşıktır.)

⑤ $|x+y| \leq |x|+|y|$ Çözümü için 4. soru kullanılacak.

$-|x| \leq x \leq |x|$

+ $-|y| \leq y \leq |y|$

$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$ olur $|x| \leq a$ eşitsizliğinden,
 $-a \leq x+y \leq a$

$|x+y| \leq |x|+|y|$ olur.

Ödev// $|x-y| \leq |x|+|y|$ olduğunu gösteriniz?

$-|x| \leq x \leq |x|$

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$ $|x| \leq a$ dan,

+ $-|y| \leq y \leq |y|$

$|x-y| \leq |x|+|y|$ olur.

$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$

⑥ $|xy| = |x| \cdot |y|$

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ $|y| = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ -y & y < 0 \end{cases}$

• $x \geq 0, y \geq 0$ olsun.

$|x| = x$ $|y| = y$ $xy \geq 0$ olur. $|xy| \geq 0$ $|xy| = xy$ $|x| \cdot |y| = xy$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| //$

- $x \geq 0$ ve $y < 0$ olsun.

$$|x| = x \quad |y| = -y \quad xy < 0 \quad |xy| = -(xy) \quad |x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(xy)$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| //$$

$x < 0$ ve $y \geq 0$ için de aynıdır.

- $x < 0$ ve $y < 0$ olsun.

$$|x| = -x \quad |y| = -y \quad xy > 0 \quad |xy| = xy \quad |x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = xy$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| //$$

Problem 11: $x, y \in \mathbb{R} \quad a > 0$

1- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

2- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Gözüm ① $-|x - y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ denektir. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ doğru
için.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Üçgen eşitsizliğinde x yerine $x - y$, daha sonra y yerine $y - x$ yazalım.

$$x = x - y$$

$$y = y - x \quad \text{yazılırsa}$$

$$|x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| \leq |x - y| + |y| \quad \text{--- (1)}$$

$$|x + y - x| \leq |x| + |y - x|$$

$$|y| \leq |x| + |y - x| \quad \text{--- (2)}$$

(1) de y 'yi eşitsizliğin soluna alırsak,

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{--- (3)}$$

(2) de x 'i eşitsizliğin soluna alırsak,

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y| \quad \text{eşitsizliğini } (-1) \text{ ile çarparsak}$$

$$|x| - |y| \geq -|x - y| \quad \text{veya}$$

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \quad \text{--- (4)}$$

(3) ve (4) eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{buradan}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \text{olur.}$$

$$|y - x| = |x - y|$$

Problem 12 : $f = \{(-3,2), (0,0), (2,4), (3,-2), (4,3)\}$

$g = \{(2,0), (3,4), (4,7), (6,2)\}$ fonksiyonları veriliyor.

a) f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz? $D_f = ?$ $D_g = ?$

b) f ve g " değer " " ? $R_f = ?$ $R_g = ?$

c) $f+g$, $f \cdot g$, f^2+3g fonksiyonlarını ve tanım kümelerini belirtiniz?

d) $[f+g]_{(2)}$ ve $[f^2+3g]_{(2)}$ değerlerini hesaplayınız?

Çözüm //

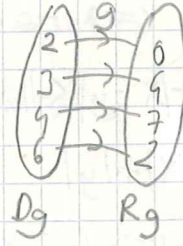
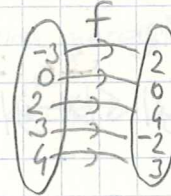
a) $D_f = \{-3, 0, 2, 3, 4\}$

$D_g = \{2, 3, 4, 6\}$

b) $R_f = \{2, 0, 4, -2, 3\}$

$R_g = \{0, 4, 7, 2\}$

tanım kümesi (x,y)
değer kümesi $f(x)$



c) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$g: B \rightarrow \mathbb{R}$

$(f+g): A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$

$(f \cdot g): A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$

$f+g$ nin tanım kümesi, fonksiyonların toplamının tanımı gereğinde $D_f \cap D_g$ dir.

$(f+g) = (D_f \cap D_g) = \{2, 3, 4\}$

$f \cdot g$ nin tanım kümesi, çarpımın tanım kümesi gereği, $(f \cdot g) = (D_f \cap D_g) = \{2, 3, 4\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\rightarrow (f+g)_{(2)} = f(2) + g(2) = 4 + 0 = 4$

$(f+g)_{(3)} = f(3) + g(3) = -2 + 4 = 2$

$(f+g)_{(4)} = f(4) + g(4) = 3 + 7 = 10$

$\{ (2,4), (3,2), (4,10) \}$ $(f+g)$ nin değeri

$(f \cdot g)_{(2)} = f(2) \cdot g(2) = 4 \cdot 0 = 0$

$(f \cdot g)_{(3)} = f(3) \cdot g(3) = -2 \cdot 4 = -8$

$(f \cdot g)_{(4)} = f(4) \cdot g(4) = 3 \cdot 7 = 21$

$f \cdot g$ nin değeri $\{ (2,0), (3,-8), (4,21) \}$

$(f^2+3g)_{(2)} = 16$

$(f^2+3g)_{(3)} = 4 + 3 \cdot 4 = 16$

$(f^2+3g)_{(4)} = 9 + 3 \cdot 7 = 30$

$f^2(2) = f(2) \cdot f(2) = 16$

$f^2(3) = (-2) \cdot (-2) = 4$

$f^2(4) = 3 \cdot 3 = 9$

f^2+3g nin değeri $\{ (2,16), (3,16), (4,30) \}$

$$d) (f+g)_{(2)} = 4 \quad (f^2+3g)_{(2)} = 16 //$$

Problem 13: a- $C_E(C_E A) = A$

b- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

c- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olduğunu gösteriniz?

a) $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$

$$\forall x \in C_E(C_E A) \Leftrightarrow x \notin C_E A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ ise,}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_E(C_E A) \subset A \text{ dir.} \\ A \subset C_E(C_E A) \text{ dir.} \end{array} \right\} C_E(C_E A) = A \text{ olmalıdır.}$$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$$\forall x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)$$

(önce $\Rightarrow$ kullanıp sona,
sonra $\Leftarrow$ kullanıp baya
dönülmelidir.)

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ veya } x \in B \text{ veya } x \in C \text{ dir.}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ veya } x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap C$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C \\ A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap C \end{array} \right\} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \text{ dir.}$$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\forall x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \text{ veya } x \in C$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C) \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \right\} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ olur.}$$

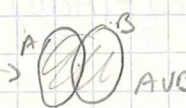
tersinden $\Rightarrow A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
alınan sonuç

Problem 14: $A, B \subseteq E$

a- $C_E(A \cup B) \equiv C_E A \cap C_E B$

b- $C_E(A \cap B) \equiv C_E A \cup C_E B$ $\rightarrow$ $\overline{A \cap B}$

c- Eğer $A \subseteq B$ ise $C_E B \subseteq C_E A$

a) $\forall x \in C_E(A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B$ 

$$\Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in C_E A \text{ ve } x \in C_E B$$

$$\Rightarrow x \in C_E A \cap C_E B$$

$$C_E(A \cup B) \subseteq C_E A \cap C_E B \quad (1)$$

$$x \in C_E A \cap C_E B \Rightarrow x \in C_E A \text{ ve } x \in C_E B$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ ve } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in C_E(A \cup B)$$

$$C_E(A \cup B) \supseteq C_E A \cap C_E B \quad (2)$$

(1) ve (2) den dolayı $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ dir. //

b) $\forall x \in C_E(A \cap B) \Rightarrow x \notin A \cap B$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ veya } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in C_E A \text{ veya } x \in C_E B$$

$$\Rightarrow x \in C_E A \cup C_E B$$

$$C_E(A \cap B) \subseteq C_E A \cup C_E B \quad (1)$$

$$x \in C_E A \cup C_E B \Rightarrow x \in C_E A \text{ veya } x \in C_E B$$

$$\Rightarrow x \in C_E A \text{ veya } x \in C_E B$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ veya } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Rightarrow x \in C_E(A \cap B)$$

$$C_E(A \cap B) \supseteq C_E A \cup C_E B \quad (2)$$

(1) ve (2) den dolayı $C_E(A \cap B) \equiv C_E A \cup C_E B$

$$\textcircled{E} \quad A \subset B \Rightarrow C \in B \subset C \in A$$

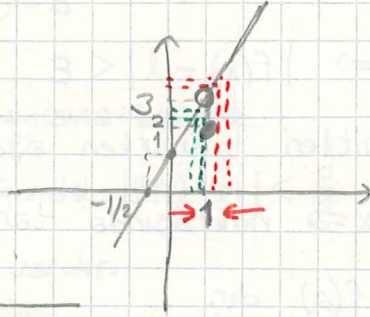
$$\left. \begin{array}{l} X \in A \Rightarrow X \notin C \in A \\ \downarrow \\ X \in B \Rightarrow X \notin C \in B \end{array} \right\} \begin{array}{l} X \notin C \in A \Rightarrow X \notin C \in B \\ C \in B \subset C \in A \end{array}$$

LIMITLER

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 1 \text{ ise} \\ 2, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$



$$x=1 \text{ için } y=3$$

$x < 1$	$x > 1$
$f(0,7) = 2,4$	$f(1,3) = 3,6$
$f(0,9) = 2,8$	$f(1,1) = 3,2$
$f(0,99) = 2,98$	$f(1,01) = 3,02$
$f(0,999999) = 2,999998$	$f(1,000001) = 3,000002$

$$x \rightarrow 1 \quad f(x) \rightarrow 3$$

Bu fonksiyonun o noktadaki aldığı değerle

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

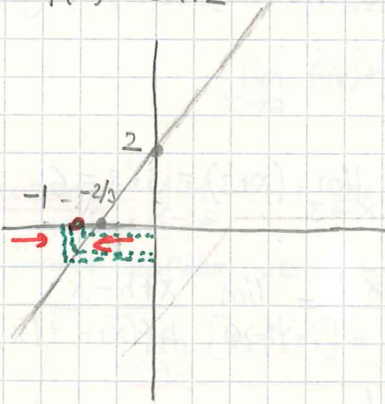
aldığı limit değeri farklıdır. (Bazen eşit olabilir)

Örnek

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3x+2$$

$x = -1$ noktasındaki limitini inceleyiniz.



$x < -1$	$x > -1$
$f(-1,2) = -1,6$	$f(-0,8) = -0,4$
$f(-1,1) = -1,3$	$f(-0,9) = -0,7$
$f(-1,01) = -1,003$	$f(-0,99) = -0,99$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 3x+2 = -1 //$$

$$f(-1) = 3(-1)+2 = -1 //$$

Fonksiyon o noktada sürekli ise limit değeri fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olur.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $x_0 \in A$ verilsin.

Bu f fonksiyonunun bu x_0 noktasında limitinin var olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, öyle bir λ sayısının var olabilmesidir ki, istenildiği kadar küçük seçilebilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ ve $x \neq x_0$ için

$|f(x) - l| < \varepsilon$ olacak biçimde ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilsin. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ yazılır.}$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \text{ için.}$$

Fonksiyonların limitleri bulunurken aşağıdaki üç hal ortaya çıkar:

1- f fonksiyonu $x=a$ noktasında tanımlı ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ dir.}$$

Örnek 1 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $x=0$ da limit nedir?

$$f(0) = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+1} = 1 //$$

Örnek 2 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{4^2}{\sqrt{1+4}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5} //$

2- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ olması, yani b limitinin varlığı, f nin mutlaka $x=a$ için

tanımlı olmasını gerektirmez. Yani $x=a$ noktasında fonksiyon

tanımlı olmasa da $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limiti var olabilir.

Örnek 1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6$

Örnek 2 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3- f fonksiyonu $x=a$ noktasında tanımlı olmadığı gibi,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limiti de varolmayabilir.

Örnek $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ $x=\pi$ $\sin \pi = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sin x} \text{ tanımlı değildir, sonsuzdur.}$$

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitleri varsa,

263

$f(x)$ ve $g(x)$ 'in de a noktasında limiti vardır.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

İspat: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$|x - a| < \delta_1 \text{ olduğunda } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots (1)$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır.

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ aynı sayı verildiğinde,

$$|x - a| < \delta_2 \text{ olduğunda } |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots (2)$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır.

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |f(x) - A| + |g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$$

Aynı $\varepsilon > 0$ verilsin, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \delta_1 \text{ ve } |x - a| < \delta_2$$

$$\underbrace{|f(x) - A|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{|g(x) - B|}_{\varepsilon/2} = \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B //$$

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ varsa ve $r \in \mathbb{R}$ ise, $r \cdot f(x)$ 'in de bu a noktasında limiti vardır ve,

$$\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ olur.}$$

İspat: Eğer $r = 0$ ise limit sıfırdır. $r \neq 0$ $|r| \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$|x - a| < \delta \text{ olduğunda } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|r|}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$$|r \cdot f(x) - r \cdot A| = |r(f(x) - A)| = |r| \cdot |f(x) - A|$$

Aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde aynı δ yı alırsak,

$|x-a| < \delta$ olduğunda,

$$|r \cdot f(x) - r \cdot A| = |r(f(x) - A)| = |r| \cdot |f(x) - A| < |r| \cdot \frac{\varepsilon}{|r|} = \varepsilon \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} r \cdot f(x) = r \cdot A \text{ olur.}$$

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 4 = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + 4 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 = 20$$

1. Sonuç: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitleri varsa

$f(x) - g(x)$ 'in de a noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \text{ olsun}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + (-g(x))]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} -g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-1)g(x) = -\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} (-g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ tir.}$$

2. Sonuç: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - A] = 0$

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 2x + 4 = \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 4$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ise

$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |A|$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

İspat:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1$$

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad \delta = \delta(\varepsilon)$$

$\delta > 0$ sayısı vardır. Eğer

$$|x - a| < \delta \text{ ise } |f(x)| = |f(x) - A + A| = |(f(x) - A) + A| \leq \underbrace{|f(x) - A|}_{< 1} + |A| < 1 + |A|$$

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ile $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ varsa,

$f(x) \cdot g(x)$ çarpımının da a noktasında limiti vardır ve,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

olur.

İspat: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ile $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B \text{ dir.}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall |x-a| < \delta$ olduğunda

$|f(x) \cdot g(x) - AB| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunursa bu çarpımın limiti $A \cdot B$ dır.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir önceki teoremden dolayı,

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < |A|+1 \quad \text{----- (1)}$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow |x-a| < \delta_2 \quad \text{----- (2)}$$

olduğunda $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow |x-a| < \delta_3 \quad \text{----- (3)}$$

olduğunda $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ olacak şekilde bir $\delta_3 > 0$ sayısı vardır.

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - A \cdot B| &= |f(x) \cdot g(x) - Bf(x) + Bf(x) - A \cdot B| \\ &= |f(x)(g(x) - B) + B(f(x) - A)| = |f(x)(g(x) - B)| + |B(f(x) - A)| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| < (|A|+1) \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} + \frac{|B|}{2(|B|+1)} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow$$

$$|x-a| < \delta_1, |x-a| < \delta_2, |x-a| < \delta_3$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon //$$

bu değeri 1 almalıyız
sonuç $\varepsilon/2$ olmalı

$$\begin{aligned} |B| &< |B|+1 \\ \frac{1}{|B|} &> \frac{1}{|B|+1} \Rightarrow \frac{|B|}{|B|+1} < 1 \end{aligned}$$

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ise ($B \neq 0$)

$|x-a| < \delta$ olduğunda $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

İspat: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow \varepsilon = \frac{|B|}{2}$ alırsak

$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned} |g(x) - B| &< \frac{|B|}{2} \text{ olur.} \\ |a| - |b| &\leq |a-b| \quad \forall |x-a| < \delta \text{ ise} \end{aligned}$$

$$|g(x)| - |B| < \frac{|B|}{2} \Rightarrow |B| - \frac{|B|}{2} < |g(x)| < |B| + \frac{|B|}{2}$$

$$\frac{|B|}{2} < g(x) < \frac{3|B|}{2} \text{ olur.}$$

Teorem : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ varsa ve limiti sıfırdan farklı ise,

$1/g(x)$ fonksiyonunun da a noktasında limiti vardır. Bu limit.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ olur.}$$

İspat: $\forall \varepsilon > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varlığını göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Önceki teoremden dolayı,

$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| > \frac{|B|}{2}$ olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır.

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow$ Aynı $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x-a| < \delta_2$ olduğunda

$|g(x) - B| < \left(\varepsilon \frac{|B|^2}{2} \right)$ olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır.

$$\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

$|x-a| < \delta$ olduğunda, $|x-a| < \delta_1$ ve $|x-a| < \delta_2$ olur.

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{Bg(x)} \right| = \left| \frac{-(g(x) - B)}{Bg(x)} \right| = \left| \frac{g(x) - B}{Bg(x)} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|}$$

$$g(x) > \frac{|B|}{2} \text{ olur.} \quad \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{\frac{|B|}{2}} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{|B|}$$

$$\frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|} = \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{|g(x) - B|}{|B|} < \frac{2}{|B|} \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \left(\frac{|B|^2}{2} \cdot \varepsilon \right) = \varepsilon$$

Sonuç :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ varsa $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ise bu takdirde,

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 'in de a noktasında limiti vardır ve,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ olur.}$$

İspat : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$ bir önceki teoremden dolayı,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ olur.}$$

Örnek : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} x+2}$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x}}{\lim_{x \rightarrow 2} x+2} = \frac{\sqrt{2}}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4} //$$

Bazı Özel Limitler

① $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$ dir.

$\forall \varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$|x-0| < \varepsilon \Rightarrow |x^p-0| < \varepsilon$ olmalıdır. ($\delta = \varepsilon^{1/p}$ olarak seçelim.)

$x < \delta$ olduğunda $|x^p-0| = |x^p| = (|x|)^p < \delta^p = (\varepsilon^{1/p})^p = \varepsilon$ dir.

Not = p nin pozitif kesir olması halinde de bu limit yine sıfıra gider.

② $p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$R(x) = \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_0} \quad (p, \text{ dereceden bir polinom})$$

verilmiş olsun. $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$ ne olur?

$$R(x) = \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_0} = \frac{a_p x^p \left(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{p-2}}{a_p} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{a_p} \cdot \frac{1}{x^p}\right)}{b_q x^q \left(1 + \frac{b_{q-1}}{b_q} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_{q-2}}{b_q} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{b_0}{b_q} \cdot \frac{1}{x^q}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \frac{a_p}{b_q} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{p-q} \quad \text{bu limiti irdelenek için 3 hal olabilir.}$$

a) $\underline{p=q}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_p}{b_q}$

b) $\underline{p < q} \Rightarrow p-q < 0$ ve $-(q-p) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_p}{b_q} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{p-q} = \frac{a_p}{b_q} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-(q-p)} = \frac{a_p}{b_q} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-p}} = 0$$

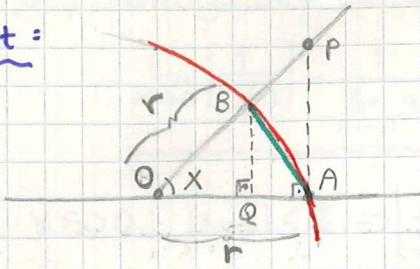
Payın derecesi paydanın derecesinden küçük olduğu için lim. sıfırdır.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x^4 + 8x^2 + 3}{x^7 + 5x} = 0$

c) $\underline{p > q} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty$ (İşaret problemin gelişine göre $+$, $-$ olabilir) veya

Teorem : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

İspat :



$$\frac{BQ}{r} = \sin x$$

$$BQ = r \sin x$$

$$\frac{AP}{r} = \tan x$$

$$AP = r \tan x$$

$$\frac{\widehat{AB}}{r} = x \quad \widehat{AB} = r \cdot x$$

$\triangle OAB$ alanı < OAB daire kesmesinin alanı < $\triangle OAP$ alanı

$$\frac{r^2 \sin x}{2} < \frac{r^2 x}{2} < \frac{r^2 \tan x}{2}$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1 \quad \text{o halde,}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \quad \text{ve} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1} \quad \text{dir.}$$

Örnek $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2$

Örnek $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin 2x}{2x}}{\frac{3 \sin 3x}{3x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3} //$

Aşağıdaki limitleri bulun?

1/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x}$ 2/ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{1 + x^2}$

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{1^2 + 1}{2 \cdot 1} = 1 = f(1)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{2x} + \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{2x} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x}$

• $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{4^2}{1 + 4} = \frac{16}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x}$
 $= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 //$

3) Ödev: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1+x}{x} \right)^3 = ? = \left(\frac{1+2}{-2} \right)^3 = \frac{1}{8} //$

4) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = \frac{0+1}{1} = 1$

5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin \pi}{\sin 2\pi} = \frac{0}{0}$ belirsizlik

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} (-1) = -\frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ belirsizlik

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{(1-x)} = \frac{0}{0}$ belirsizlik $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^3)}{(1-x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x+x^2) = 1+1+1^2 = 3 //$$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{0+\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

9) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{0}{0}$ belirsizlik.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h+4 = 0+4 = 4$$

10) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0}$ belirsizlik

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} // \end{aligned}$$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2+x} - \sqrt{x} = \sqrt{2+\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$ belirsizlik.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-x}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})} = \frac{2}{\infty} = 0 //$$

Not: $\frac{\text{sayı}}{\text{sonsuz}} = \text{sıfır}$.

$$\text{sayı} \cdot \text{sonsuz} = \text{sonsuz}$$

$$\frac{\text{sonsuz}}{\text{sayı}} = \text{sonsuz}$$

$$\text{sonsuz} \mp \text{sayı} = \text{sonsuz}$$

$$\frac{\text{sayı}}{\text{sıfır}} = \text{sonsuz}$$

Not : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ belirsizlikleri vardır.

12- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

13- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{4x^2 - x}} =$

14- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \infty \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \infty \cdot \cos \frac{1}{\infty} = \infty \cdot \cos 0 = \infty \cdot 1 = \infty //$

15- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ (ödev)

16- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{0}{0}$ belirsizlik $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 //$

17- $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{\infty} = \cos 0 = 1$

18- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{0}{0}$ belirsizlik

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 //$$

19- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{x} = ?$

20- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x} = ?$

21- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = ?$

22- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{\sin qx} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin px}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin qx} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{px \cdot \sin px}{px}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{qx \cdot \sin qx}{qx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{qx} = \frac{p}{q} //$

23- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ belirsiz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2} //$$

24 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{2x} - 1 \right) = \infty \cdot 0$ belirsizlik.

$x \rightarrow \infty$ ise $\frac{1}{2x} \rightarrow 0$ $\frac{1}{2x} = h \Rightarrow h \rightarrow 0$ $x = \frac{1}{2h}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2h} \right)^2 (\cos h - 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \cdot \cos h - 1 = \frac{1}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2}$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$= \frac{1}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h^2}$

$= \frac{1}{4} (-2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h^2}$

$= -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \right)^2$

$= -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right)^2$

$= -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{2} \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2$

$= -\frac{1}{8} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = -\frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{8}$

25 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x} = ?$

26 - $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan 2\theta}{\theta} = ?$

27 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} = ?$

28 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$ belirsizlik.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) = m$

29 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad 0 < r < 1$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) = a \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 - r}$

$= a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r} \right) = a \cdot \frac{1}{1-r} - a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1-r}$

$= \frac{a}{1-r}$

ör// $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = ?$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$30- \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = ? \quad 1$$

$$31- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{(n-1)^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizlik.}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n-1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n-1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})}{(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+0}{1-0+0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$32- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2(n-1)^3} = ? \quad (n-1)^3 = (n-1)(n^2-2n+1) \quad 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} 33- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n(2n+1)}{n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2n+3+\frac{1}{n})}{n^2} \\ &= \frac{1}{6} \left(2 \cdot \infty + 3 + \frac{1}{\infty} \right) = \infty \end{aligned}$$

Ödev// Aşağıdaki limitleri bulunuz?

$$1- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3}{x-3} = ?$$

$$2- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$$

$$3- \lim_{x \rightarrow 0} 3x \cot x = 3 \text{ ok. göst.}$$

$$4- m > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2} = 8 \text{ ise } m = ?$$

$$5- \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right] = ?$$

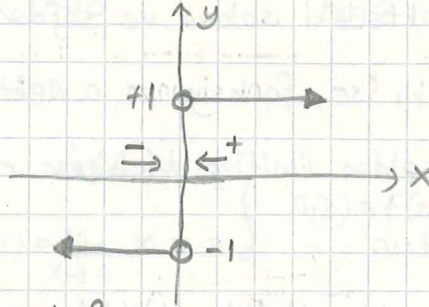
$$6- \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 3x \sin \frac{2}{x} = ?$$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin ve $x_0 \in A$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ (fonksiyonun x_0 noktasındaki soldan limiti l dir.)

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = k$ (" x_0 " sağdan limiti k dir.)

Örnek // $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \frac{|x|}{x}$



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ noktasındaki
sağdan ve soldan limit nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

sağdan limit

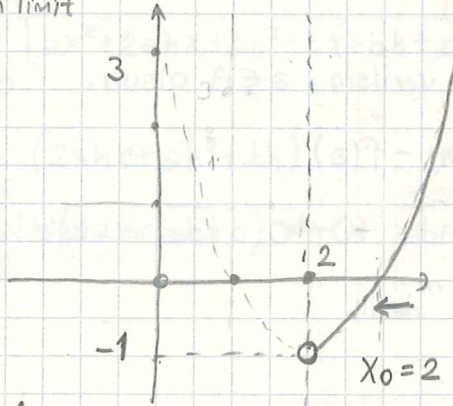
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

soldan limit

Örnek // $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 4x + 3$$

$$= 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 //$$



$$x=0 \Rightarrow y=3$$

$$y=0 \Rightarrow x=1$$

$$y=0 \Rightarrow x=-1$$

Soldan limit bulunamaz

Çünkü sol taraf

verilen fonksiyonda tanımlı değil

Örnek // $f: [0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{12}{x^2 + 6} \quad x_0 = 3 \quad \lim = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x^2 + 6} = \frac{12}{9 + 6} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} //$$

Örnek // $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases} \text{ ise}$$

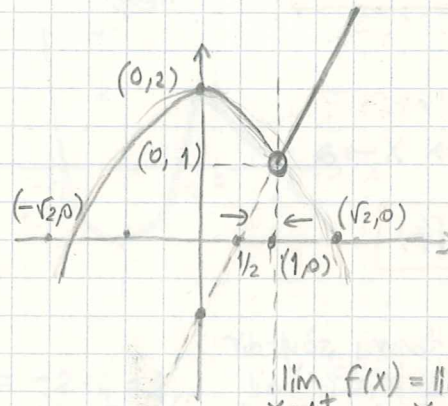
$$y = -x^2 + 2$$

$$x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0, 2)$$

$$y=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad (-\sqrt{2}, 0) \quad (\sqrt{2}, 0)$$

$$f'(x) = -2x = 0 \quad x=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=2$$



$$y = 2x - 1$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \quad (0, -1)$$

$$y=0 \Rightarrow x = 1/2 \quad (1/2, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 = 2 - 1 = 1 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 2 = -1 + 2 = 1 //$$

lim

limit var.
ama sürekli
değil,

Sonuç: Bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, o noktada soldan ve sağdan limitlerin varolup birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda, fonksiyonun söz konusu noktadaki limiti, soldan ve sağdan limit değerleri birbirine eşittir.

Eğer f fonksiyonun, bir noktadaki soldan ve sağdan limitleri varsa ve bu limit değerleri birbirinden farklı ise, fonksiyonun o noktada limiti yoktur, denir.

Birinci örnekte sağdan ve soldan limitler birbirine eşit olmadığı için $x_0=0$ da fonksiyonun limiti yoktur.

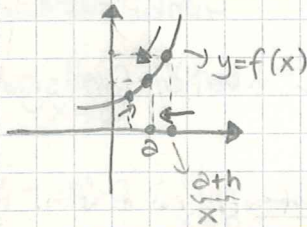
Dördüncü örnekte sağdan ve soldan limitler birbirine eşit olduğu için $x_0=1$ de limit değeri vardır.

- Süreklilik -

Tanım 1 $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. $a \in A$ olsun.

$$a+h \quad k = f(a+h) - f(a)$$

Eğer $h \rightarrow 0$ olduğunda $k \rightarrow 0$ ise bu takdirde f fonksiyonuna " a noktasında süreklidir" denir.



Tanım 2 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$

Tanım 3 $a+h = x$

$$h \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Veya süreklilik tanımı şöyledir:

$\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x-a| < \delta$ olduğunda

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu

a noktasında süreklidir denir.

kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyona, " A kümesinde sürekli" veya kısaca, "sürekli" denir.

1. Örnek $f(x) = x$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz. ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h) - x] = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \quad \text{sürekli dir.}$$

Veya, $\forall a \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ f(a) = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a \end{array} \right\} f(a) = f(x) \quad \text{sürekli dir.}$$

2. Örnek $f(x) = ax^2 + bx + c$ sürekli olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} [a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - [ax^2 + bx + c] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2ahx + ah^2 + bh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h(2ax + ah + b) = 0 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Veya,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

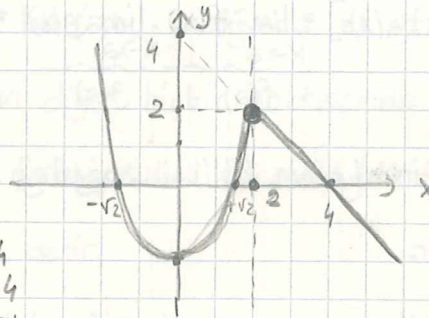
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^2 + bx + c) = ax_0^2 + bx_0 + c \\ f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{her noktada sürekli dir.}$$

3. Örnek $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ -x + 4, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ise}$$

Sürekli olduğunu gösteriniz? (sürekli midir?)

$$\begin{aligned} y &= -x + 4 \\ x = 0 &\Rightarrow y = 4 \\ y = 0 &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$



$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{2}$$

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

f'	-	-	0	+	+
f					
			-2		

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \stackrel{?}{=} f(2)$$

$$f(2) = -2 + 4 = 2 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 4 = 2 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 - 2 = 2 //$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ fonksiyon bu noktada sürekli dir.

Sürekli Fonksiyonlar Hakkında Teoremler :

Teorem : Sonlu sayıda sürekli fonksiyonun toplamı da sürekli fonksiyondur.

İspat // f ve g sürekli ise

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ olsunlar.} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g): A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall a \in A \text{ alalım. } f, a' \text{ da sürekli olduğundan } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$g, a' \text{ da " " " } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = (f+g)(a) \text{ olduğunu göstermek gerekir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \underbrace{f(a)}_{f(a)} + \underbrace{g(a)}_{g(a)} = f(a) + g(a) = (f+g)(a) //$$

Not : İspat sonlu şekilde de tümevarımla yapılabilir.

Teorem : Sonlu sayıda sürekli fonksiyonun çarpımı da sürekli fonksiyondur.

İspat // f ve g sürekli ise

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ olsunlar.} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ dir.}$$

$$(f \cdot g): A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dir.}$$

$$\forall a \in A \text{ alalım } f, a' \text{ da sürekli ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$g, a' \text{ da " " " } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(a) \text{ olduğunu göstermek gerekir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \underbrace{f(a)}_{f(a)} \cdot \underbrace{g(a)}_{g(a)} = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a) \text{ olur.}$$

Teorem : İki sürekli fonksiyonun bölümü, paydayı sıfır yapan değerler hariç sürekli bir fonksiyondur.

İspat // f ve g sürekli ise

$$\forall a \in A \text{ alalım.}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, a' \text{ da sürekli ise } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$g, a' \text{ da paydayı sıfır yapan değer hariç,}$$

$$\text{sürekli ise } (g(x) \neq 0) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

Teorem : Bir skaler sayı ile bir sürekli fonksiyonun çarpımı yine sürekli fonksiyondur.

İspat // $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$

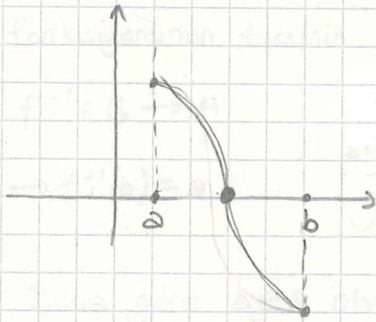
$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\forall a \in A$ alalım.

$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \cdot f(a)$ dir.

- Sürekli Fonksiyonların Temel Özellikleri -

1- Bir (a, b) aralığında sürekli olan bir f fonksiyonu bu aralığın uçlarında zıt işaretli değerler alıyorsa, bu aralıkta en az bir defa sıfır olur.



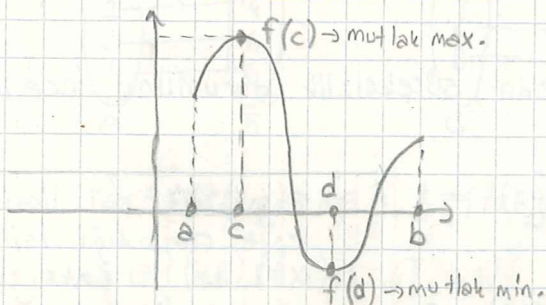
Eğri a 'dan b 'ye gelirken, x eksenini keser.

(0 noktada aldığı değer sıfırdır.)

Bu özelliğin sonucu olarak şunu söyleyebiliriz :

(a, b) aralığında sürekli olan bir f fonksiyonu $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki değerleri en az bir kere alır. (Bu teoreme ara değerli teorem denir.)

2- (a, b) aralığında sürekli olan f fonksiyonu verildiğinde bu aralığın en az öyle bir c noktası vardır ki, f fonksiyonu bu aralığın hiçbir noktasında $f(c)$ den daha büyük değer alamaz. Yine bu (a, b) aralığında en az öyle bir d noktası vardır ki, f fonksiyonu bu aralığın diğer hiçbir noktasında $f(d)$ den daha küçük bir değer alamaz. Bu $f(c)$ sayısına f fonksiyonunun bu aralıktaki "mutlak maksimum", $f(d)$ 'ye ise "mutlak minimum", denir.



(a, b için ve sürekli fonksiyon ise.)

$f(c) - f(d)$ farkına da fonksiyonun bu aralıktaki salınımı (osilasyonu) denir.

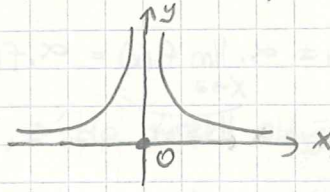
- Süreksizlik -

1- Sonsuzluklar :

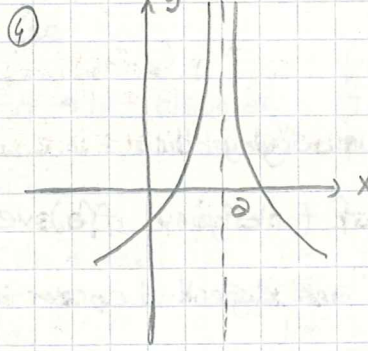
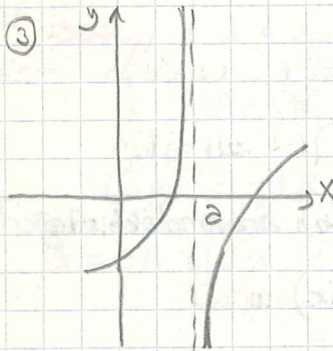
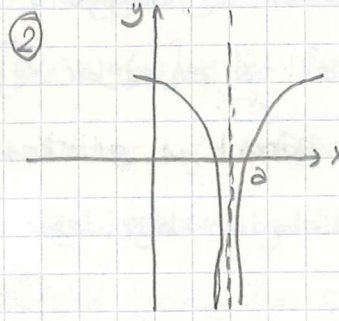
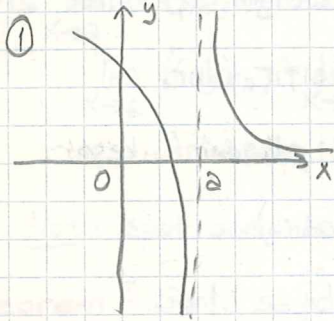
Örnek// $y = f(x) = \frac{1}{3-x}$

$x_0 = 3$ noktası için fonksiyon sonsuza gider.

Örnek// $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 0$



Bu sonsuzluk ile ilgili süreksizlik şu şekile olabilir;



2- Esas Süreksizlikler :

$f: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A$

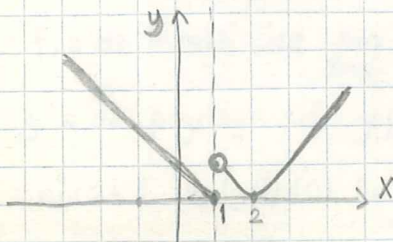
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (ise fonksiyonun a noktasında limiti yoktur.)

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow$ farkına, fonksiyonun bu noktadaki Sıçraması denir.

Örnek 1// $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1 \\ (x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$

$x=1$ noktasında, süreksizlik durumunu inceleyiniz.



$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0$

Sağ limit sol limite eşit olmadığı için $x=1$ de bu fonksiyon süreksizdir. Bu, esas süreksizlik noktasıdır.

Örnek 2// $f(x) = x^2 + \frac{|2x|}{x}$ $x=0$ da sürekli midir?

$$x > 0, f(x) = x^2 + 2$$

$$x < 0, f(x) = x^2 - 2$$

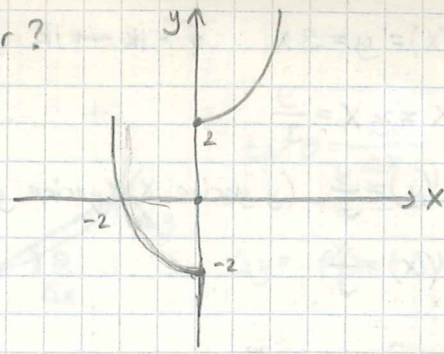
Esas süreksizlik noktasıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2 = -2$$

$2 \neq -2$ olduğu için.

$$\text{Sırama ise } 2 - (-2) = 4 //$$



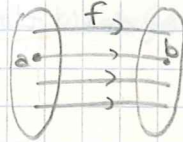
Ters Fonksiyonun Grafiği =

$$A, B \subset \mathbb{R}, f: A \rightarrow B \text{ olsun}$$

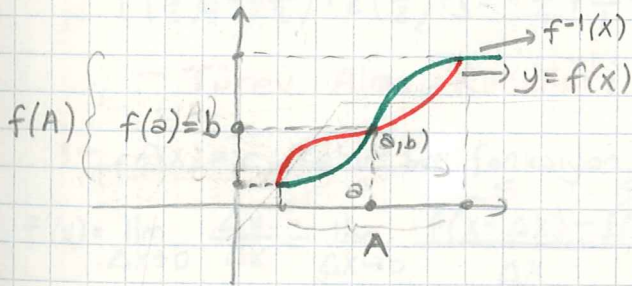
f fonksiyonunun tersinin olması için gerekli ve yeterli koşul, birebir ve örten olması

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$b \rightarrow f^{-1}(b) = a$$



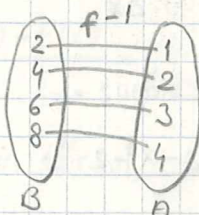
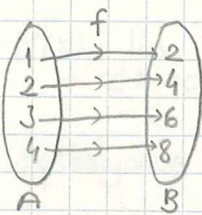
Buna göre $a \in A$ olmak üzere $(a, b) = (a, f(a))$ ikililerine düzlemde karşı gelen noktalar, f fonksiyonunun grafiğini oluştururken $f(A)$ kümesinin elemanları yatay eksende alınarak $b \in f(A)$, $(b, a) = (b, f^{-1}(b))$ ikililerine düzlemde karşı gelen noktalar, f^{-1} fonksiyonunun grafiğini oluşturur.



$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \\ \Rightarrow y = f^{-1}(x) \text{ olur.}$$

$f^{-1}(x)$ in grafiği O noktasına göre $f(x)$ 'e simetrik.

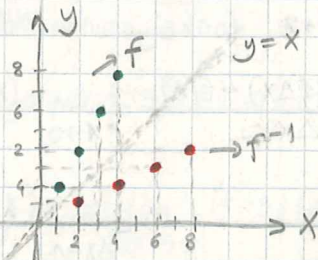
Örnek 1//



$$G_f = \{x | (x, y), x \in A, y = f(x)\}$$

$$= \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$G_{f^{-1}} = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$$

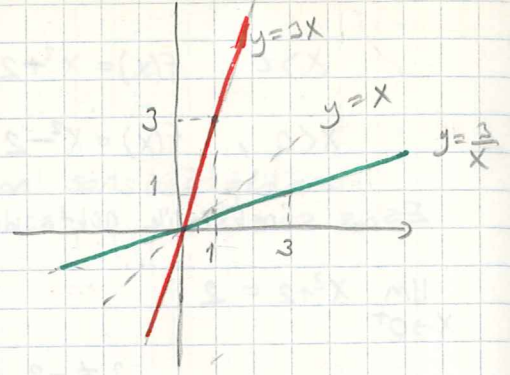


Örnek 2// $f(x) = y = 3x$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (birebir ve örten dir, ve tersi vardır)

$$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y}{3} \quad (y \text{ yerine } x, x \text{ yerine } y \text{ yazılırsa})$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$



- TÜREV -

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, herhangi bir $x \in A$ verilsin.

x 'e bir Δx artması verilsin. fonksiyonun aldığı aralık Δy veya $\Delta f(x)$ olsun.

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{eğer bu limit varsa,}$$

bu limitin değerine, bu fonksiyonun x noktasındaki türevi denir. Bu x noktasındaki

türev, sembolik olarak,

$$f'(x), y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx} \text{ gösterilir.}$$

Tanım: Eğer bu f fonksiyonun $\forall x \in A$ da türevi varsa, f 'ye " A kümesinde türevlenebilir" veya " a noktasında türevi vardır." denir.

Örnek// $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 4$ f 'nin $x=2$ noktasındaki türevi nedir?

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) \quad f(2) = 4$$

$$= [(2 + \Delta x)^2 - 2(2 + \Delta x) - 4] - f(2)$$

$$= (4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 - 2\Delta x - 4) - 4$$

$$= 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

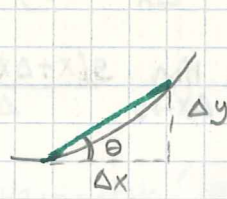
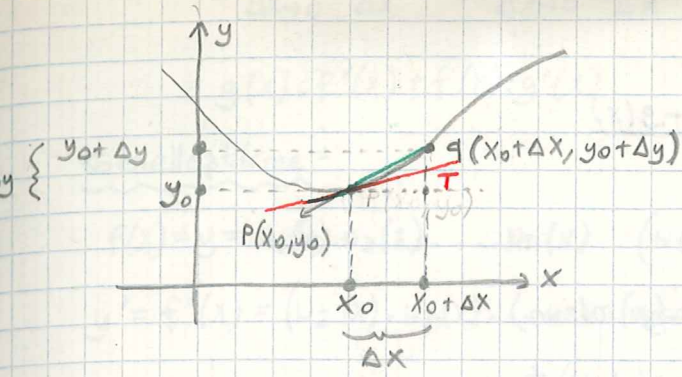
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 //$$

Örnek// $y = x^2 + 2$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2 - x^2 - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - x^2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 2x //$$



$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m$$

$m \Rightarrow$ P Q kirisinin eğimidir.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$m \Rightarrow$ P(x_0, y_0) noktasındaki tegetin eğimidir.

Örnek // $y = f(x) = -x^2 + 2x + 3$ parabolünün $x_0 = \frac{3}{2}$ apsisli noktasındaki tegetinin eğimini ve bu tegetin denklemini bulunuz?

$$m = f'(x_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$f'(x_0) = -2x + 2$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -1$$

$$m = -1$$

$$y - \frac{15}{4} = -1\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y - \frac{15}{4} = -x + \frac{3}{2}$$

$$y = -x + \frac{21}{4} //$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = -\frac{9}{4} + \frac{6}{2} + 3 = \frac{15}{4} = y_0$$

- Türev Alma Kuralları -

1- $f(x) = c$ sabit bir fonksiyon verilsin. Türevi $f'(x) = 0$ dir.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

2- $y = f(x) = x$ fonksiyonunun türevi 1 dir.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

3- İki fonksiyonun toplamının türevi, bu fonksiyonların türevlerinin toplamına eşittir.

$$A \subset \mathbb{R} \quad f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g)(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x + \Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

4- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ (c bir skaler sayı olsun)

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \text{ olur.}$$

İspat// $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(cf)(x+\Delta x) - (cf)(x)}{\Delta x} = (cf)'(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

Sonuç: 3. ve 4. sonucu olarak,

$$(f-g)' = f' - g' \text{ dir.}$$

$$(f-g) = f + (-1)g$$

$$(f-g)' = (f + (-1)g)' = f' + (-1) \cdot g' = f' - g'$$

5- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $g: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \text{ olur.}$$

İspat// $y = (f \cdot g)(x)$ olsun

değişkenin Δx artmasına karşı f 'nin aldığı değer Δf , g 'nin aldığı değer

Δg olsun.

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f+\Delta f)(g+\Delta g) - (f \cdot g)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{fg + f\Delta g + g\Delta f + \Delta g \cdot \Delta f - fg}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g \frac{\Delta f}{\Delta x} + f \frac{\Delta g}{\Delta x} + \Delta f \frac{\Delta g}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x}$$

$$= g \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + f \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \cancel{\Delta f} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Genelleştirme:

$f(x) = y = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x)$ ($u_1, u_2, \dots, u_n$ 'ler x 'e bağlı fonksiyonlardır.)

$$y' = f'(x) = (u_2(x) \cdot u_3(x) \cdot \dots \cdot u_n(x) \cdot u_1'(x) + (u_1(x) \cdot u_3(x) \cdot \dots \cdot u_n(x)) u_2'(x) + \dots + (u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_{n-1}(x)) u_n'(x)$$

Özel olarak $u_1(x) = x, u_2(x) = x, \dots, u_n(x) = x$ alalım.

$$f(x) = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ tane}} = x^n$$

$$f'(x) = \underbrace{(x^{n-1}) \cdot 1 + (x^{n-1}) \cdot 1 + \dots + (x^{n-1}) \cdot 1}_{n \text{ tane}}$$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

Örnek // $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^4$

Örnek // $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$$f'(x) = (3x^2)' + (-6x)' + (5)'$$

$$= 3(x^2)' + (-6)(x)' + 0$$

$$= 3 \cdot 2x^{2-1} - 6 \cdot 1 + 0$$

$$= 6x - 6$$

Örnek // $f(x) = (x^2 - 3x)(2x + 1)$

1.yol / $f'(x) = (x^2 - 3x)' \cdot (2x + 1) + (2x + 1)' \cdot (x^2 - 3x)$

$$= (2x - 3)(2x + 1) + 2(x^2 - 3x)$$

$$= 4x^2 + 2x - 6x - 3 + 2x^2 - 6x$$

$$= 6x^2 - 10x - 3$$

2.yol / $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x^2 - 3x$

$$= 2x^3 - 5x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x - 3$$

12H 1050

6- $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsunlar. (A daki her noktada türevlenebilir olsunlar).

$x \in A, g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun da $x \in A$ da türevi vardır ve

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{dir.}$$

Uyarı: İki fonksiyonun bölümlerinin türevi, bunların ayrı ayrı türevlerinin bölümlerine eşit olmadığına dikkat edelim. Aynı kural çarpım için de geçerlidir.

İspat // $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Δx artmasına karşılık f 'nin aldığı değer Δf ,
 g 'nin aldığı değer Δg olur.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g} - \frac{f}{g}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(f+\Delta f) - f(g+\Delta g)}{g(g+\Delta g)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{gf + g\Delta f - fg - f\Delta g}{[g(g+\Delta g)] \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} - f \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g+\Delta g)} \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g \frac{\Delta f}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f \frac{\Delta g}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(g+\Delta g)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Örnek // $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2} = \frac{(x+3)'(x^2+2) - (x^2+2)'(x+3)}{(x^2+2)^2}$

$$= \frac{1 \cdot (x^2+2) - 2x(x+3)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2+2-2x^2-6x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2-6x+2}{(x^2+2)^2}$$

Özel Hâl: $\frac{1}{g(x)}$ in türevi, ($g(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{0 \cdot g(x) - g(x)' \cdot 1}{[g(x)]^2} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Örnek // $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Örnek // $f(x) = \frac{1}{x^6} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6x^5}{x^8} = -\frac{6}{x^3}$

Teorem : $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. Eğer f fonksiyonu bir $x_0 \in A$ noktasında türevlenebilir ise bu noktada süreklidir.

İspat // $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right]$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

$f'(x_0)$

Uyarı : Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması, o fonksiyonun o noktada türevlenebilmesini gerektirmez. Bununla ilgili bir örnek yapalım.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

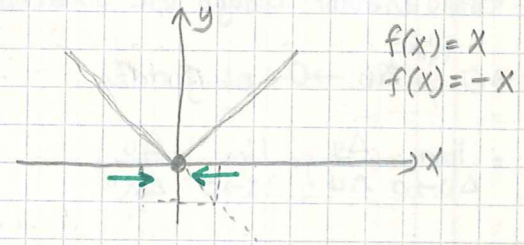
$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ ise}$$

$x_0 = 0$ için incelersek,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] = |x+\Delta x| - |x|$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(0+\Delta x) - f(0)] = |0+\Delta x| - |0|$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$$



$x = 0$ da fonksiyon süreklidir.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

bu noktada limit olmadığı için türev de yoktur.

Fonksiyon Fonksiyonunun Türevi : (Bileşke Fonksiyonun Türevi)

Teorem : $u = \varphi(x)$ ve $y = f(u)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. x 'in bir x_0 değeri için, u nun aldığı değer, $u_0 = \varphi(x_0)$ olsun.

Eğer $u = \varphi(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ için bir $\varphi'(x_0)$ türevine sahip ise ve $y = f(u)$ fonksiyonu $u = u_0$ için bir $f'(u_0)$ türevine sahip ise bu takdirde

$$y = f[\varphi(x)] = (f \circ \varphi)(x) \text{ fonksiyonu da } x = x_0 \text{ noktasında } \frac{dy}{dx} = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$$

türevine sahiptir.

İspat //

$$f \circ \varphi(x) = f(\varphi(x))$$

$$\varphi(x_0) = u_0$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x_0 \xrightarrow{f \circ \varphi} \varphi(x_0) = u_0 \xrightarrow{f} f(\varphi(x_0)) = f(u_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) \\ &= f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \end{aligned}$$

$$y = f(u) = f(\varphi(x))$$

Δx , x_0 dan itibaren alınan artma
 x_0 'a göre

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

φ türevlenebilir olduğu için süreklidir.

$\Delta x \rightarrow 0$ için $\Delta u \rightarrow 0$ olduğundan

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

Örnek // $f(x) = \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_u = y$

$$u(x) = x^2 + 2x - 3 \quad f(x) = u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= f'(u) = 3u^{3-1} = 3u^2 \\ &= 3(x^2 + 2x - 3)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx} = 3(x^2 + 2x - 3)^2 \cdot (2x + 2)$$

Örnek // $y = f(x) = x^2(x^2 + 1)^4 - 1$

$$y' = 2x \cdot (x^2 + 1)^4 + ((x^2 + 1)^4)' \cdot x^2 - 0$$

$$w(x) = \underbrace{(x^2 + 1)^4}_u = u^4$$

$$u(x) = x^2 + 1$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dw}{dx} = 2x$$

$$\frac{dw}{du} = 4u^3 = 4(x^2 + 1)^3$$

$$\frac{dw}{dx} = 4(x^2 + 1)^3 \cdot 2x = 8x(x^2 + 1)^3$$

$$y' = 2x(x^2+1)^4 + 8x(x^2+1)^3 \cdot x^2$$

$$y' = 2x(x^2+1)^4 + 8x^3(x^2+1)^3$$

- Türevle İlgili Konular -

Ardışık Türevler : (yüksek mertebeden Türevler)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ veriliyor.

$y' = f'(x)$ in tekrar bir türevi varsa,

$y'' = f''(x)$ e bu fonksiyonun ikinci türevi denir.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$y''' = f'''(x) \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{üçüncü türev denir.}$$

$$y^n = f^n(x) \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n}$$

Örnek // $y = f(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^2 + 5x - 8$

$$y' = f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 14x + 5$$

$$y'' = f''(x) = 20x^3 - 36x^2 - 14$$

$$y''' = f'''(x) = 60x^2 - 72x$$

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = 120x - 72$$

$$y^{(5)} = f^{(5)}(x) = 120 \quad y^{(6)} = f^{(6)}(x) = 0$$

Örnek // $f(x) = x^n = y$

$$y' = f'(x) = nx^{n-1}$$

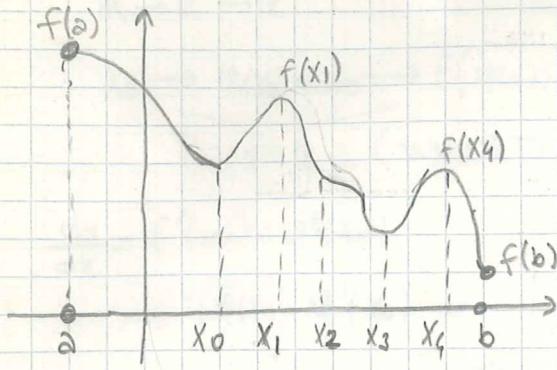
$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

$$y^n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- Bir Fonksiyonun Maksimum ve Minimum Değerleri -



$f(a)$: mutlak maksimum noktası

a : mutlak maksimum

Tanım : $y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu f fonksiyonunun tanım kümesine ait bir x_0 noktasını kapsayan uygun bir alt aralıktaki tüm x 'ler için $f(x_0) \geq f(x)$ oluyorsa bu x_0 noktasına bu fonksiyonunun bir yerel maksimum (lokal maksimum) noktası denir. $f(x_0)$ değerine ise bu fonksiyonun yerel maksimum değeri denir. Benzer şekilde x_0 noktasını kapsayan bir alt aralıktaki tüm x noktaları için $f(x_0) \leq f(x)$ oluyorsa bu x_0 noktasına bu fonksiyonun yerel minimum noktası (lokal minimum noktası), $f(x_0)$ değerine ise bu fonksiyonun yerel minimum değeri denir.

(fonksiyonların birden fazla max. ve min değerleri olabilir.)

Tanım : Eğer bir f fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm x noktaları için $f(x) \geq f(x_0)$ oluyorsa bu x_0 noktasına mutlak minimum noktası, $f(x_0)$ değerine ise mutlak minimum değeri denir.

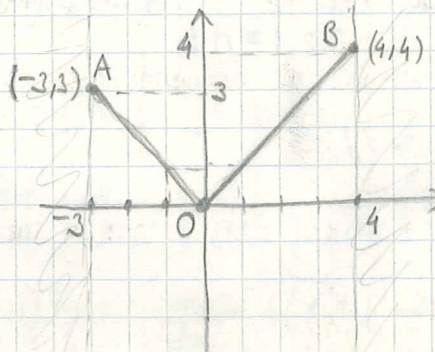
Yine, tanım kümesindeki tüm x değerleri için $f(x) \leq f(x_0)$ oluyorsa, bu x_0 noktasına f fonksiyonunun mutlak maksimum noktası, $f(x_0)$ değerine ise mutlak maksimum değeri denir.

(mutlak maksimum ve minimum değerleri birer tane dir.)

Örnek 1 // $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = |x|$$

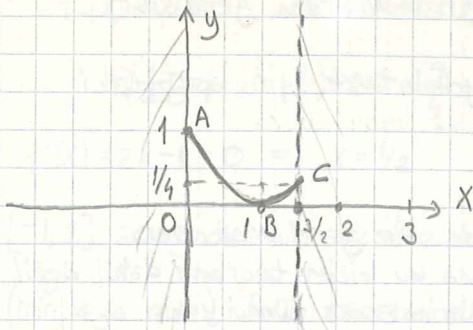
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$



B, mutlak max noktası
A ve B yerel max
0 yerel min.
0 mutlak min.

Örnek 2// $f: [0, 3/2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 2x + 1$

289



A, C yerel max

A mutlak max.

B yerel ve mutlak min. noktası

(Yerel max = max , Yerel min = min)

(maximum ve minimumların ikisine birden ekstreum dır.)

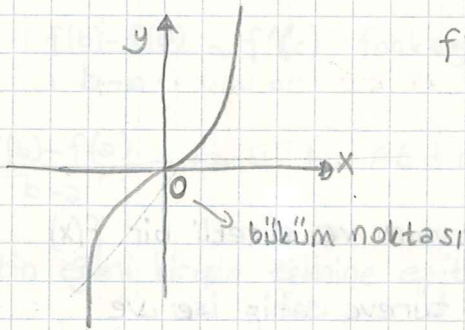
Tanım: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow y = f(x)$ verilsin. a ve b noktalarına uç noktalar denir.

Bir fonksiyonun türevinin tanımsız olduğu tüm noktalar ve türevinin sıfır olduğu tüm x_0 noktalarına bu f fonksiyonunun kritik noktaları denir.

Eğer bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları varsa, bu noktalar fonksiyonun kritik noktaları arasında aranmalıdır. Ancak her kritik nokta bir maksimum veya minimum noktası olmak zorunda değildir.

(kritik nokta $\rightarrow$ türevi sıfır yapar veya tanımsızdır.)

Örnek // $f(x) = x^3$ $x_0 = 0$



$$f'(x) = 3x^2 \quad 3x^2 = 0 \quad x_{1,2} = 0$$

$f'(0) = 0$ türevi tanımlıdır ama sıfır olduğu için maksimum ve minimum noktası yoktur.

Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonu bir (a, b) aralığının $x = x_0$ gibi bir noktasında bir maksimum noktasından veya bir minimum noktasından geçiyorsa ve bu noktada sonlu bir $f'(x)$ türevine sahipse bu takdirde, $f'(x_0) = 0$ dır.

İspat // Kabul edelim ki, $x = x_0$ da bir yerel maksimum noktası olsun.

O halde, $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ olur.

Ödev // $x = x_0$ da yerel min. ?

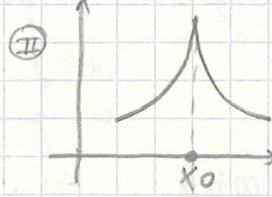
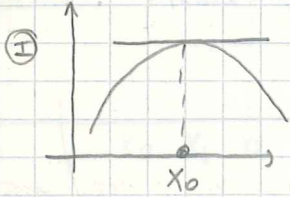
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \leq 0, \quad h \geq 0 \text{ ise}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geq 0, \quad h \leq 0 \text{ ise.}$$

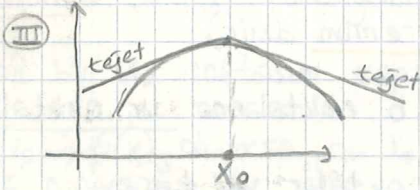
Uyarı : Verilen teorem ve hipotezlere dikkat edelim.

Türevin olmadığı durumlarda da fonksiyon ekstremumlardan geçebilir.

Bu durum verilen teoreme dahil değildir. Bu durumu aydınlatmak için aşağıdaki fonksiyonlara dikkat edelim.

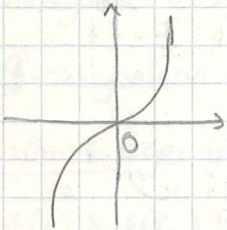


② de bir yerel max. var.
ama bu bizim teoreme dahil değil.
Bu noktada türevi yok.



Bu noktada iki ayrı teget var.
Bu noktalara köşeli nokta denir.
Türevi yoktur.

Uyarı : Verilen teorem bir $f(x)$ fonksiyonunun bir maksimum veya minimuma sahip olması için yalnız gerekli koşulları içermektedir. Yani sonlu bir türevin olması halinde eğer fonksiyon bir ekstremumdan geçiyorsa o noktadaki türev sıfıra eşittir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

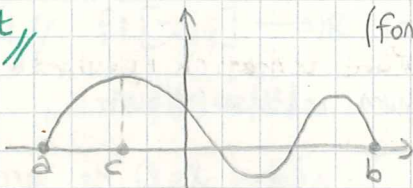


Türev burada 0 noktasında olduğuna göre max ve min yoktur.
Buna büküm noktası denir.

Teorem : (Rolle Teoremi) :

(a,b) açık aralığının içinde ve uçlarında tanımlı ve sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu bu aralığın içinde sonlu ve belirli türevelere sahip ise ve $f(a)=f(b)=0$ oluyorsa, aralığın içinde a ve b 'den farklı en az bir c noktasında $f'(c)=0$ olur.

İspat //



(fonksiyon a ve b 'de sıfır ise 0 noktada doğruyu keser.)

Fonksiyonun c noktasında hem maksimum,

hence türevi vardır. Fonksiyon, uç noktalarda

sıfırdır. Sürekli olması için aralarda bir yerde bir ekstremum vardır.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y = f(x) = x^2 - x - 2$$

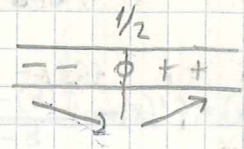
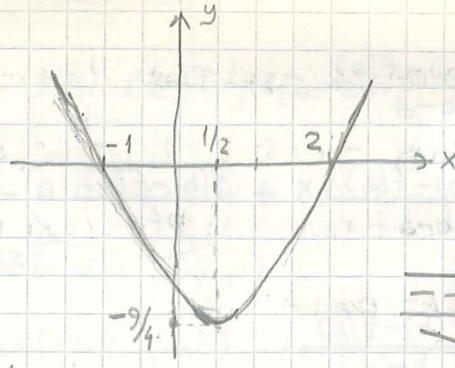
$$f'(x) = 2x - 1 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$$

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$[-1, 2]$ aralığında bir ekstremum vardır.

(min veya max.) Rolle teoremine göre.



2. Örnek // Rolle teoremi yardımıyla $y = f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun köklerden yararlanarak ekstremumunu bulunuz.

Üç kökü vardır. $x^3 - x = 0$, $x(x^2 - 1) = 0$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$$

fonksiyon bu noktada sürekli'dir.

(Türemlenebilir.)

- Ortalama Değer Teoremi (Formülü) -

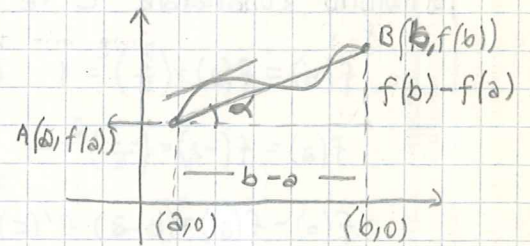
Bir (a, b) aralığında sürekli olan ve bu aralığın her noktasında belirli ve sonlu bir türev kabul eden bir fonksiyon $f(x)$ olsun.

Bu koşullar altında en az bir c noktası için $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$

bağıntısı vardır. Ortalama değer formülü adı verilen bu bağıntıya, ara değer veya sonlu artmalar formülü de denir.

İspat // $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ fonksiyonunu bulacağız.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \alpha \text{ bu AB kirisinin eğimidir.}$$



tegetin eğimi kirisin eğimine eşittir.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

$$l(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a)$$

$$l(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) - f(a)$$

$$l(a) = 0$$

$$l(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) - f(a)$$

$$\Rightarrow f(b) - f(b) - f(a) + f(a) = 0$$

Rolle teoremini uygularsak $\rightarrow$

$$l(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a) - f(a)$$

$$= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} a - f(a)$$

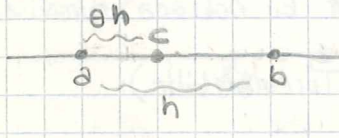
→ Sabit sayı, türevi sıfırdır.

$$l'(x) = f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$l'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow$$

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \quad \dots \quad 1$$

Bu formülü değişik şekilde de yazabiliriz.



$$b = a + h$$

$$a + \theta h = c$$

$$0 < \theta < 1$$

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a + \theta h) \quad \dots \quad 2$$

Veya

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a + \theta h) \quad \dots \quad 3 \quad \text{yazılabilir.}$$

Örnek //

$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3$ fonksiyonu için $a = -2$ $b = 2$ alarak ve ortalama değer formülünü kullanarak c ve θ değerlerini bulunuz?

$$f(b) = f(2) = \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 1$$

$$f(a) = f(-2) = \left(\frac{-2}{2}\right)^3 = -1$$

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

$$1 - (-1) = (2 - (-2)) \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$2 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{4}$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \quad c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$c = a + \theta h$$

$$h = b - a = 2 - (-2) = 4$$

$$\pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = -2 + \theta \cdot 4$$

$$4\theta = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} //$$

Bu c noktasındaki teğetin eğimi

esas noktaların birisine eşit.

Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi bir (a, b) aralığında daima pozitif ise

bu $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta artan bir fonksiyondur.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

(Tersi de doğrudur)

$$x - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

İspat// $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(a+\theta h)$

$a=x_1, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1 + \theta h) > 0$ $c = a + \theta h$ $h = b - a$
 $\downarrow$
 (hipotezden dolayı)

Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi bir (a,b) aralığında daima negatif ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta azalan bir fonksiyondur.

İspat// Sonucu bir önceki teoremin benzeriyle bulabiliriz.

Bir Fonksiyonun Ekstremlerinin Olması İçin Gerek ve

Yeterli Koşullar :

Ortalama değer teoreminin koşullarını gerçekleyen ve ayrıca sürekli ve sıfırdan farklı bir^{ve} ikinci türev kabul eden bir $f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım ve $a=x_0$ $a+h=x$ olsun.

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot f'(x_0 + \theta_1(x - x_0))$$

$0 < \theta_1 < 1$ bu f fonksiyonunun tanım aralığında alınan öyle bir A bulmak istiyoruz ki,

$$f(\xi) - f(x_0) - (\xi - x_0) \cdot f'(x_0) - \frac{(\xi - x_0)^2}{2} A = 0$$

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2} A$$

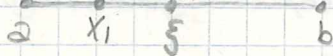
$$\varphi(\xi) = f(\xi) - f(x_0) - (\xi - x_0) f'(x_0) - \frac{(\xi - x_0)^2}{2} A$$

$$f(\xi) - f(x_0) = (\xi - x_0) f'(x_0) + \frac{(\xi - x_0)^2}{2} A$$

$$\varphi(\xi) = (\xi - x_0) f'(x_0) + \frac{(\xi - x_0)^2}{2} - f(\xi - x_0)^2 f'(x_0) - \frac{(\xi - x_0)^2}{2} A = 0$$

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - (x_0 - x_0) f'(x_0) - \frac{(x_0 - x_0)^2}{2} A$$

$f'(x_0) = 0$ $\varphi'(x_1) = 0$ dir.



$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0) - (x - x_0) A$$

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - f'(x_0) - (x_1 - x_0) A = 0$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) - (x_0 - x_0) A = 0$$

$$\psi''(x) = f''(x) - A$$

$$\psi''(x_2) = f''(x_2) - A = 0 \Rightarrow A = f''(x_2)$$

$$x_2 = x_0 + \theta(\xi - x_0) \quad A = f''(x_0) + \theta(\xi - x_0)$$

$$\xi = x \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot f''[x_0 + \theta(x - x_0)] \quad (2)$$

(II. Ortalama Değer Formülüdür.)

$$0 < \theta < 1$$

$$x_0 \text{ max} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$x_0 \text{ min} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$$

I. Hâl: $f'(x_0) \neq 0$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'[x_0 + \theta(x - x_0)] \quad (1)$$

$f'(x_0)$ in işareti ile $f'[x_0 + \theta(x - x_0)]$ in işareti aynıdır.

(1) ortalama değer formülünün sağ tarafı $(x - x_0)$ in işaretine bağlıdır.

x 'in x_0 dan büyük ya da küçük olmasına göre, ifadenin sağ tarafı işaret değiştirir. Dolayısıyla $f(x) - f(x_0)$ farkı x_0 noktası civarında işaret korumaz.

Bu noktada bir ekstremum olamaz. (Türev sıfırdan farklı ise). Büküm noktası olabilir.

II. Hâl: $f'(x_0) = 0$ olsun ve $f''(x_0) \neq 0$ olsun.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''[x_0 + \theta(x - x_0)] \quad (3)$$

$f''(x_0)$ in işareti ile $f''[x_0 + \theta(x - x_0)]$ in işareti aynıdır.

$\frac{(x - x_0)^2}{2}$ her zaman $(+)$ dir. Dolayısıyla $f(x) - f(x_0)$ in işareti $f''(x_0)$ in

işaretine bağlıdır. Dolayısıyla (3) ifadesinin sağ tarafı $f''(x_0)$ in işaretine bağlıdır.

Eğer $f''(x_0) < 0$ ise $f(x) - f(x_0) < 0$ dir. Bu noktada bir max. vardır.

" $f''(x_0) > 0$ ise $f(x) - f(x_0) > 0$ dir. " " min vardır.

II. Hâli Özetlersek:

1- Eğer $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) < 0$ ise bu $f(x)$ fonksiyonu bu noktada bir maksimuma sahiptir. Maksimum değeri $f(x_0)$ dir.

2- Eğer $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$ ise bu $f(x)$ fonksiyonu bu noktada bir minimuma sahiptir. Minimum değeri $f(x_0)$ dir.

Örnek 1 // $y = f(x) = x(x^2 - 6)$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz?

$$f'(x) = (x^3 - 6x)' = 3x^2 - 6 = 0 \text{ olmalı.}$$

$$3x^2 = 6 \quad x^2 = 2 \quad x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}[(\sqrt{2})^2 - 6]$$

$$\bullet f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0 \text{ minimum vardır.}$$

$$= \sqrt{2}(2 - 6) = -4\sqrt{2}$$

$(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ de minimum vardır.

$$\bullet f''(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0 \text{ maksimum vardır.}$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}[(-\sqrt{2})^2 - 6] = +4\sqrt{2}$$

$(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ de maksimum vardır.

Örnek 2 // $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ ekstremumlarını bulunuz?

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$\bullet f''(1) = 12 + 6 = 18 > 0 \text{ min vardır.}$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 6 = -1$$

$(1, -1)$ de minimum vardır.

$$\bullet f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0 \text{ max var.}$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 6 =$$

$(-2, 26)$ da max. var.

$$= 2 \cdot (-8) + 3(4) + 24 + 6 = 26$$

- DİFERANSİYELLER -

Tanım : $y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli bu fonksiyonun $f'(x)$ türevi ile değişkenin Δx artmasının çarpımına eşittir.

Yani $f'(x) \cdot \Delta x$ tir.

Diferansiyeli dy veya $d f(x)$ ile göstereceğiz.

$$dy = f'(x) \Delta x$$

$$d f(x) = f'(x) \Delta x$$

Özel olarak, $y = f(x) = x$ alırsak $dy = \Delta x$ olur.

$$\frac{d f(x)}{dx} = \Delta x \Rightarrow \underline{\underline{dx = \Delta x}}$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

veya

$$\underline{\underline{d f(x) = f'(x) dx}}$$

(f fonksiyonunun diferansiyelidir.)

Örnek // $y = x^m$ olsun, $y' = mx^{m-1}$

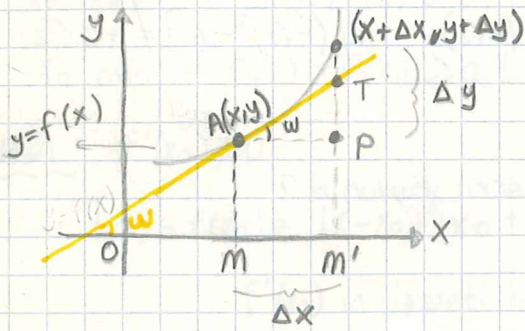
$$dy = f'(x) dx$$

$$dy = mx^{m-1} dx$$

Örnek // $y = x^3 + 4x^2 - 5$ $y' = 3x^2 + 8x$

$$dy = (3x^2 + 8x) dx$$

Diferansiyelin Geometrik Anlamı :



$$\tan w = \frac{PT}{\Delta x} \quad PT = (\tan w) \Delta x$$

$$\tan w = f'(x) = m$$

$$PT = f'(x) \cdot \Delta x$$

(PT uzaklığı Δy den farklıdır.) PT burada diferansiyeli verir,

$$\Delta y - dy = m' \Delta x$$

Fonksiyon Fonksiyonunun (Bileşke Fonksiyonun) Diferansiyeli :

$y = f(u)$ $u = u(x)$ verilsin.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (dx) \text{ ile çarpalım.}$$

$$dx \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \cdot dx$$

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du \Rightarrow \boxed{dy = f'(u) \cdot du}$$

Ardışık (Yüksek Mertebeden) Diferansiyeller :

$y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$dy = f'(x) dx$$

$y = x$ alınırsa,

$$\Delta x = dx$$

$$d(dy) = d(f'(x) dx)$$

$$d^2y = f''(x) (dx)^2$$

$$\boxed{d^2y = f''(x) dx^2}$$

ikinci mertebeden diferansiyel

$$d^3y = f'''(x) dx^3$$

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n \quad \text{olur.}$$

Örnek // $m > n$ olmak üzere $y = x^m$ fonksiyonunun n 'inci mertebeden:

diferansiyelini bulunuz?

Çözüm // $d^n y = f^n(x) dx^n$

$$y' = m x^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1) x^{m-2}$$

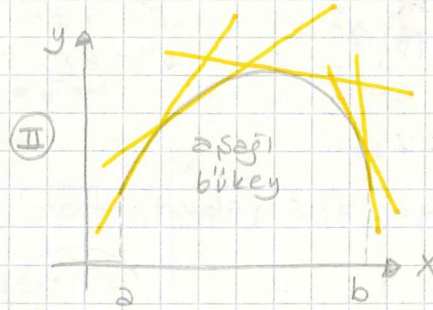
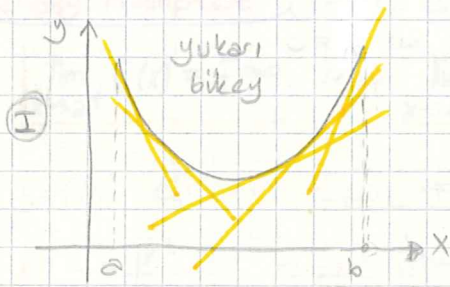
$$y''' = m(m-1)(m-2) x^{m-3}$$

$$y^n = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)] x^{m-n}$$

$$d^n y = (m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)) dx^n$$

Grafik Çizimleri :

Eğrilerin Bükeyliği :



Tanım: Eğer bir aralıkta fonksiyonun eğrisine çizilen bütün teğetler eğrinin altında kalıyorsa bu eğriye, bu aralıkta yukarı bükey denir.

Eğer teğetler eğrinin üstünde kalıyorsa bu eğriye aşağı bükey denir.

1. şekilde teğetlerin eğimleri giderek büyüyor. Bunun anlamı x büyüdükçe (a, b) de $y' = f'(x)$ artan bir fonksiyondur. Daha önce verilen teoremden dolayı $f''(x) = y''$ daima pozitifdir. $f''(x) \geq 0$ dir. Tersi de doğrudur. Bu durumda eğri yukarıya doğru bükeydir.

2. şekilde teğetlerin eğimleri giderek küşülüyor. Bunun anlamı x büyüdükçe (a, b) 'de $y' = f'(x)$ azalan bir fonksiyondur. Daha önce verilen teoremden dolayı $f''(x) = y''$ daima negatiftir. $f''(x) \leq 0$ dir. Tersi de doğrudur. Bu durumda eğri aşağı bükeydir.

Özetlersek ; $y = f(x)$ fonksiyonu için belli bir aralıkta $f''(x) \geq 0$ ise eğri yukarıya doğru bükeydir, o aralıkta $f''(x) \leq 0$ ise eğri aşağıya doğru bükeydir.

1. Örnek // $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ fonksiyonunun büyüklük durumunu inceleyiniz.

$$y' = 3x^2 - 6x + 6$$

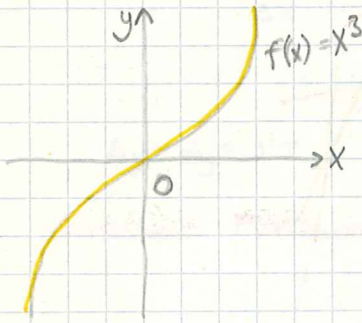
$$y'' = 6x - 6 = 0$$

$$6x = 6 \quad x = 1$$

x		1		
f''(x)	-	-	0	+
f(x)	↘		↗	↘

Tanım : Bir fonksiyonun aşağı büyüklükten yukarı büyüklüğe veya yukarı büyüklükten aşağı büyüklüğe geçtiği ve eğrinin sürekli olduğu noktaya büküm noktası denir.

2. Örnek // $y = f(x) = x^3$



$$y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x \quad 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x		0		
y''	-	-	0	+
y	↘		↗	↘

↓
büküm noktası

Uyarı : Bir noktanın ikinci türevi sıfır yapması, o noktanın mutlaka bir büküm noktası olduğu anlamına gelmez. İkinci türevin işaretini incelerken iki işaret (her iki taraf) aynı ise bu nokta bir büküm noktası olamaz.

Örnek // $y = f(x) = x^4 - x$ fonksiyonunun büküm noktası var mıdır?

$$y' = 4x^3 - 1$$

$$y'' = 12x^2 = 0 \quad x_{1,2} = 0$$

x		0		
f''(x)	+	+	0	+
f(x)	↘		↗	↘

büküm noktası yoktur.

$x = 0$ noktasında ikinci türev sıfır olmasına karşı büküm noktası yoktur.

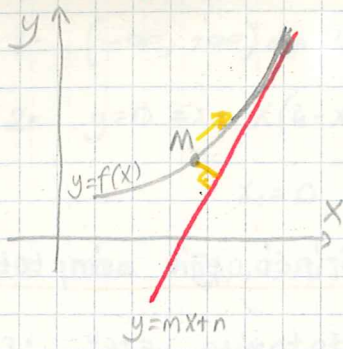
Örnek // $f(x) = y = x^4 - 6x^2 + 12x + 2$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \quad x^2 = 1 \quad x = \pm 1$$

x		-1		+		1	
f''(x)	+	+	0	-	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

(-1 ve +1 noktaları birer büküm noktasıdır.)

Asimptotlar :

$y=f(x)$ fonksiyonuna ait eğrinin sonsuza giden bir kolu üzerinde bulunan bir M noktasının bu kol üzerinde sonsuza yaklaşması halinde bu M noktası ile $y=mx+n$ doğrusu arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyorsa, bu takdirde $y=mx+n$

doğrusuna, $y=f(x)$ eğrisinin asimptotu denir.

Başka bir deyişle bir eğriye sonsuzda teğet olan doğruya bu eğrinin bir asimptotu denir.

(Düsey asimptot, yatay asimptot, eğik asimptot)

Düsey Asimptot : $y=f(x)$ eğrisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ veya $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ oluyorsa, $x=a$ doğrusuna

$y=f(x)$ eğrisinin düsey asimptotu denir. (Paydayı sıfır yapan değerdir)

Örnek // $y = \frac{x^2+5}{x-3}$ düsey asimptotu nedir?

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ de tanımlı değildir.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+5}{x-3} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+5}{x-3} = +\infty$ $x=3$ noktası düsey asimptottur.

Yatay Asimptot : $y=f(x)$ eğrisi ve $b \in \mathbb{R}$ veriliyor.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ veya $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ oluyorsa $y=b$ doğrusu, $y=f(x)$ eğrisinin

yatay asimptotudur. (limit değeridir.)

Örnek // $y=f(x) = \frac{3x^2+4}{x^2+1}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4}{x^2+1} = 3$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ $y=3$ doğrusu fonksiyonun yatay asimptotudur.

Payın derecesi paydanın derecesine eşit olmalı, veya $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ gibi değerler olabilir. Bunların limiti sıfırdır ve $y=0$ dir.

Eğik Asimptot: $y=f(x)$ eğrisi verilsin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \quad m_1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m_1 x] = n_1 \quad \text{olsun.}$$

$y_1 = m_1 x + n_1$ doğrusuna verilen $y=f(x)$ eğrisinin birinci eğik asimptotu denir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2 \quad m_2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m_2 x] = n_2$$

$y_2 = m_2 x + n_2$ doğrusuna $y=f(x)$ eğrisinin ikinci eğik asimptotu denir.

Örnek // $y = \frac{x}{x-1} + 2x$ eğrisinin eğik asimptotlarını bulunuz.

$$y = \frac{x}{x-1} + 2x = \frac{x+2x(x-1)}{x-1} = \frac{x+2x^2-2x}{x-1} = \frac{2x^2-x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-x}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x}{x-1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x}{x^2-x} = 2 = m_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - m_1 x] = n_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-x}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x-2x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 = n_1$$

$$m_1 = 2 \quad n_1 = 1 \quad y = m_1 x + n_1 \Rightarrow y_1 = 2x + 1$$

Aynı şekilde ikinci asimptot $-\infty$ için yapılırsa, $y_2 = 2x + 1$ olur.

Grafik Güzimleri:

- 1- Fonksiyonun tanım aralığı bulunur.
- 2- Eğrinin eksenleri kestiği noktalar (varsa) belirlenir.
- 3- Eğrinin (varsa) asimptotları bulunur.
- 4- Türev hesaplanır, varsa kökleri bulunur ve işaretleri (türevin) incelenir.
- 5- Gerekirse ikinci türev yardımıyla bükümlük durumu gözden geçirilir.
- 6- İlk 5 basamakta elde edilen sonuçlar bir tabloda (değişim tablosunda) değerlendirilir.
- 7- Değişim tablosu kullanılarak fonksiyonun grafiği çizilir.

Örnek 1// $y = x(4-x^2)$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

1. $(-\infty, +\infty)$ de tanımlıdır.

2. $y=0 \Rightarrow x(4-x^2)=0$ $x=0 \Rightarrow y=0$ $(0,0)$

$$x_1=0 \quad x_2=2 \quad x_3=-2$$

$$(0,0), (2,0), (-2,0)$$

3. Yatay asimptotu yoktur. x , $+\infty$ veya $-\infty$ a gittiğinde y 'sıfır olduğu için. Kesirli olmadığı için dikey asimptotu yoktur. Eğik asimptotu da yoktur.

4. $y = x(4-x^2) = 4x - x^3$

$$y' = 4 - 3x^2 = 0 \quad 3x^2 = 4 \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5. $f''(x) = -6x$ $-6x = 0 \Rightarrow x = 0$

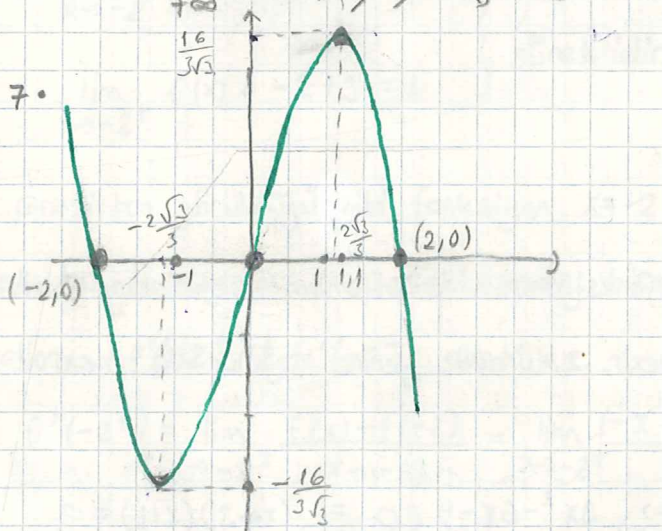
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Büküm noktası sıfırdır.

$$(0,0)$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$							

$$f'(x) = -3x^2 + 4$$



Örnek 2// $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = y$

1. $R - \{1\}$ de tanımlıdır. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2. $x=0 \Rightarrow y=-2$ $(0,-2)$

$y=0 \Rightarrow x=-2$ $(-2,0)$

3. $x=1$ dikey asimptottur. ($x-1=0$ dan)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ $y=1$ yatay asimptottur.

Yatay asimptotun olduğu yerde eğik asimptot yoktur.

4. $f'(x) = \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ fonksiyon daima azalıdır.

5.

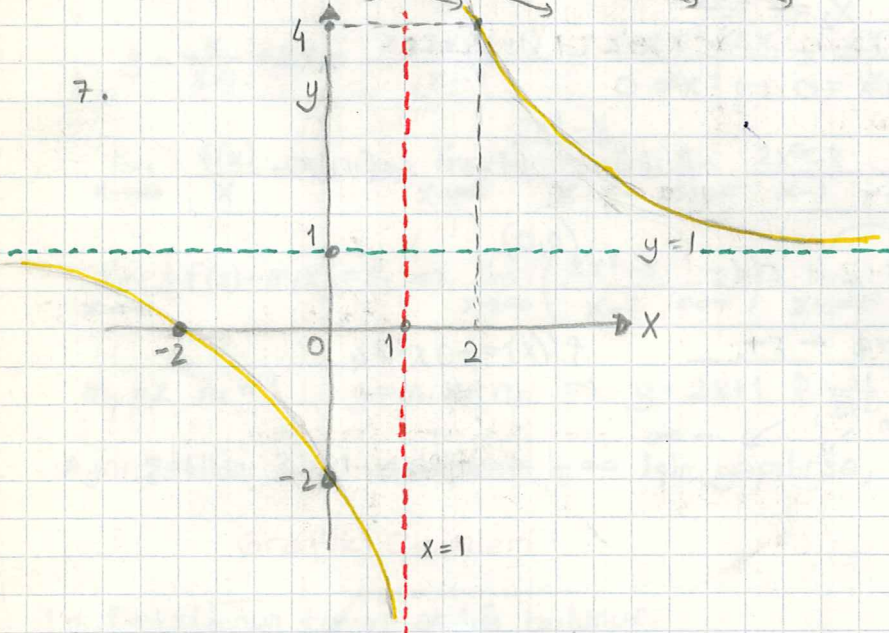
6.

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	-	-		-	-
f(x)	1	0	-2	$-\infty$ $+\infty$	4	1

(Tanımlı olmadığı nokta dikey asimptottur.)

$x=1$

7.



Uygulamalar: (Extremumla ilgili)

1- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

(1. türevin kökü ekstremum kökünü verir. 2. türevde yerine koyulur ve max. ve min. noktaları bulunur.)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0 \quad \text{min. } x=3 \text{ de}$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0 \quad \text{max. } x=-1 \text{ de.}$$

$x=3$ için $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = -25$ minimum değeri.

$(3, -25)$ minimum noktaları.

$x=-1$ için $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = 7$ max. değeri.

$(-1, 7)$ maksimum noktaları.

2- $f(x) = x^3 - 12x + 3$ fonksiyonunun yerel maksimum değerini bulunuz.

(yerel ekstremum = yerel max ve min) $[(2, -13) \text{ min. } (-2, 19) \text{ max}]$

3- $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - 1 \cdot (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x+1}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} \neq 0$$

fonksiyon, kökleri olmadığı için sıfırdan farklıdır ve yerel eks. nok. yoktur.

4- $y = 1 - |x+2|$ eğrisinin ekstremum noktalarını bulunuz.

$x \geq -2$ için $(x+2 \geq 0 \text{ için})$, $x+2$

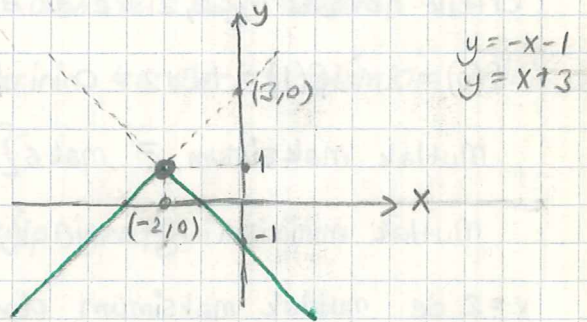
$x < -2$ için $(x+2 < 0 \text{ için})$, $-(x+2) = -x-2$

$$y = \begin{cases} x \geq -2 \text{ için } 1 - x - 2 = -x - 1 \\ x < -2 \text{ için } 1 + x + 2 = x + 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -(-2) - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2 + 3 = 1$$

} sürekli.



Grafikten görüldüğü gibi fonksiyon $x=-2$ noktasında maksimum değeri olan 1'i alıyor.

Ancak bu fonksiyonun $x=-2$ noktasında türevi yoktur. $x=-2$ de türevlenemediğini

görelim. $f'(-2^+) \neq f'(-2^-)$ olmalıdır. $f(-2) = (-x-1) = -(-2)-1 = 1$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(-x-1) - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

$$f'(-2^-) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+3) - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x+2} = 1$$

Sağ ve sol türevler eşit olmadığı için (-2) de türevi yoktur.

$$f'(-2^+) \neq f'(-2^-)$$

(Grafikte sert köşe varsa daima türevi vardır.)

Not: Bu örnekten de görüldüğü gibi bir f fonksiyonunun maksimum veya minimum olduğu yerlerde, f' türevinin olmadığı durumlar da vardır.

5- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (x-2)^3$ fonksiyonunun ekstremum noktaları var mıdır?

$$f'(x) = 3(x-2)^2 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-2)^2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

(Fonksiyonun birinci türevi sıfırsa, bu sabit bir fonksiyondur ve maksimum ve minimum noktaları yoktur.)

f fonksiyonu, $x=a$ noktasında türevli ve $x=a$ noktasında ekstremum varsa $f'(a) = 0$ dir. Bunun tersi doğru değildir. Yani $x=a$ noktasında türevli ve $f'(a) = 0$ olduğu halde a noktasında yerel ekstremum noktası olmayabilir.

6- $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimumunu bulunuz.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0, x^2 = 1, x_1 = 1, x_2 = -1 \notin [0, 2]$$

Kritik noktaları; 0, 2 ve 1 dir. ($[0, 2]$ ve $x_1 = 1$)

$$f(0) = 2 \quad f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$$

$$\text{Mutlak maksimum} = \max\{0, 2, 4\} = 4$$

$$\text{Mutlak minimum} = \min\{0, 2, 4\} = 0$$

$x=2$ de mutlak maksimum olan 4 değerini alır.

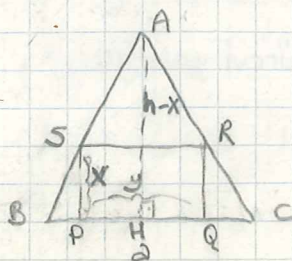
$x=1$ de mutlak minimum olan 0 değerini alır.

$$7- f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun mutlak max ve min değerlerini bulunuz.

8- $\triangle ABC$ nin tabanı $|BC| = a$ ve yüksekliği $|AH| = h$ tir. Bu üçgenin içine

bir kenarı BC üzerinde diğer iki köşesi AB ve AC kenarları üzerinde olacak şekilde yerleştirilen maksimum alanlı dikdörtgenin alanını bulunuz?



$$x, y = ? \quad \triangle ABC \sim \triangle ASR$$

$$\frac{y}{a} = \frac{h-x}{h}$$

$$y = \frac{a(h-x)}{h}$$

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{a(h-x)}{h} = \frac{a}{h} (hx - x^2)$$

$$A' = \frac{a}{h}(h-2x) \quad h-2x=0 \quad h=2x \quad x=\frac{h}{2}$$

$$y = \frac{a}{h}(h-x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{a}{2} \quad A = x \cdot y = \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a \cdot h}{4}$$

Bu dikdörtgenin alanı üçgenin alanının yarısı olur. (en fazla)

9- Toplamları 9 olan pozitif öyle iki sayı bulunuz ki, birinin karesi ile diğerinin çarpımı en büyük olsun.

$$x+y=9 \quad y=9-x$$

$$G(x) = x^2 \cdot (9-x) = 9x^2 - x^3$$

$$G'(x) = 18x - 3x^2 \quad 18x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(6-x) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 6_{\text{max.}}$$

$$y = 9 - 6 = 3$$

$$G(6) = 9 \cdot 3 \cdot 6 = 6^3 = 108 \quad G(0) = 0$$

10- Toplamları 6 ve çarpımları maksimum olan iki sayı nedir?

11- $x^2 - (m-1)x + m-2 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamının minimum olması için m ne olmalıdır?

Örnek 3, $y = \frac{x^2+1}{x}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

1) Tanım aralığı: $x=0$ da tanımsız.

$$R = \{0\} \text{ veya } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

2) $y=0$ için $x^2+1=0 \quad x^2=-1$ (x eksenini kesmez.)

$x=0$ veremeyiz. y eksenini de kesmez.

3) $x=0$ için dikey asimptot, yatay asimptot yok,

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1 \quad m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m_2 x] = 0$$

$$y_1 = m_1 x + n_1$$

$$y_2 = m_2 x + n_2 \quad (\text{iki eğik asimptot şeklidir.})$$

$$y_1 = 1 \cdot x + 0$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = 1 \cdot x + 0$$

$$y_2 = x$$

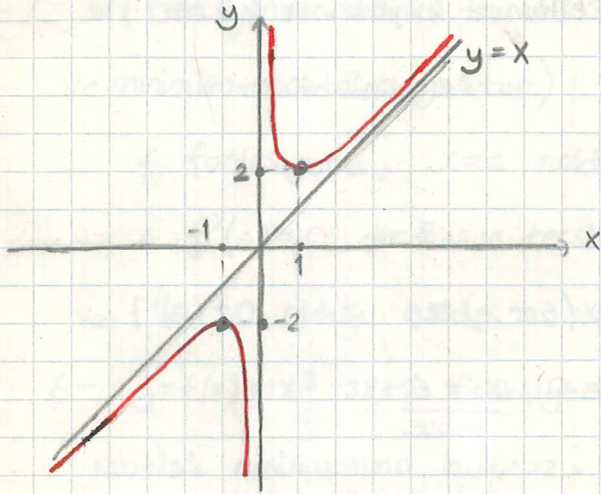
$$y_1 = y_2 = x = y \text{ eğik asimptot.}$$

$$4) y = \frac{x^2+1}{x} \quad y' = \frac{2x \cdot x - 1(x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2} = 0 \quad x^2-1=0 \quad x_1=1 \quad x_2=-1$$

6)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$+\infty$	max	$+\infty$	min	$+\infty$



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2$$

$$f(1) = 2$$

Örnek // 4 $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ değişimini inceleyip grafiğini çiziniz?

1. Tanım aralığı : $x^2-1=0 \quad x^2=1 \quad x_1=1 \quad x_2=-1$ de tanımsız.

$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ de tanımlı, $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ tanımlıdır.

2. Eksenleri kestiği noktalar,

$$x=0, y=0$$

$$y=0, x=0$$

$$(0,0)$$

3. Asimptotlar.

$x_1=-1 \quad x_2=+1$ dikey asimptotlar. Yatay asimptot yoktur.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1 = m_1 = m_2$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 = n_1 \quad n_2 = 0$$

Eğik asimptot, $y_1 = m_1 x + n_1 \Rightarrow y_1 = 1 \cdot x + 0 \quad y_1 = x \quad y_2 = x \quad y_1 = y_2 = y = x$

$$4. y = \frac{x^3}{x^2-1} \quad y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$x^4 - 3x^2 = 0, \quad x^2(x^2-3) = 0 \quad x_{1,2} = 0 \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3} \quad x_3 = -\sqrt{3} \quad x_4 = \sqrt{3}$$

X	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	+
x^2-3	+	0	-	0	+
$x^2(x^2-3)$	+	0	-	0	+

$$5. \quad y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x \cdot (x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(4x^3 - 6x - 4x(x^4 - 3x^2))}{(x^2 - 1)^2(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{4x^3 - 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3}$$

$$= \frac{-4x^5 + 16x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$\frac{2x^3 + 6x}{(x - 1)^3} = 0$$

$$2x^3 + 6x = 0$$

$$2x(x^2 + 3) = 0 \quad x = 0$$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

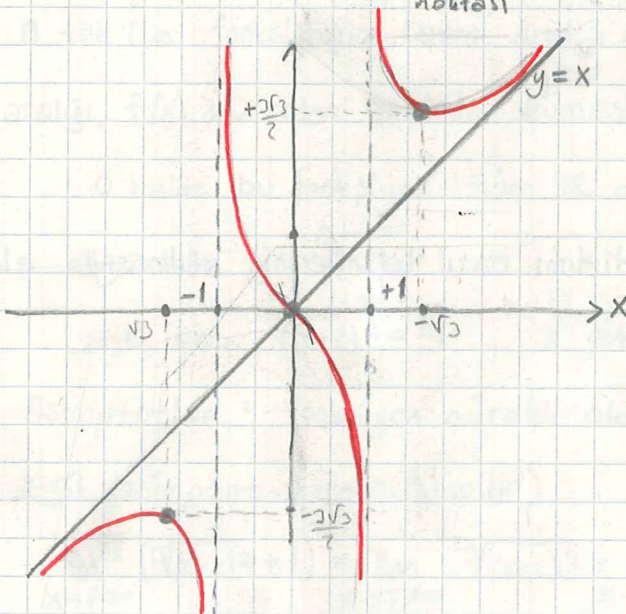
büyük noktası

X	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	+1	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	-	+
$f(x)$	∞	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	∞	0	$-\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Max. büyük noktası min.

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

7.



- DİZİLER -

Tanım: $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$ (Doğal sayılar kümesinden X kümesine giden her s fonksiyonuna bir dizi denir.)

$$n \rightarrow s(n) = s_n$$

Diziler, (s_n) , $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}$
 $s_1, s_2, \dots, s_n$
 şeklinde yazılabilir.

Tanım: Eğer dizinin elemanları sayısı sonlu ise bu diziye sonlu dizi denir.

Dizinin n 'inci terimine, dizinin genel terimi denir.

Örnek 1, $s_n = \frac{n}{n+1} \quad (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right)$$

Örnek 2, $s_n = n^2 \quad (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

$$(1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$$

Örnek 3, $s_n = (-1)^n \quad (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

Tanım: Bir $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Bu dizinin bazı terimlerinin atılmasıyla elde edilen diziye alt dizi denir.

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

$$s_{n_1}, s_{n_2}, \dots, s_{n_k}, \dots$$

$$(s_{n_k}), (s_n)$$

Örnek, $s_n = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots)$$

$4, 16, 36, \dots, (2n)^2, \dots$ yukarıdaki dizinin bir alt dizisidir.

$1, 9, 25, \dots, (2n-1)^2, \dots$ alt dizidir.

$$s_n = (2n)^2 \quad s_n = (2n-1)^2$$

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine reel dizi denir. $n \rightarrow S_n$

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine karmaşık dizi denir. $n \rightarrow S_n$

(a_n) ve (b_n) gibi iki tane reel sayı dizisi verilsin ve $C \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $(a_n) \mp (b_n) = (a_n \mp b_n) \quad n \in \mathbb{N}$

$(a_n \mp b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bu iki dizinin ^(farkı) toplamı denir.

$$(a_1 \mp b_1), (a_2 \mp b_2), (a_3 \mp b_3), \dots, (a_n \mp b_n), \dots$$

Örnek // $a_n = (2n-3) \quad b_n = (\frac{1}{n})$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a_n + b_n = (2n-3) + \frac{1}{n} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n}$$

$$a_n + b_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n}, \quad (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a_1 + b_1 = 0 \quad a_2 + b_2 = 3/2 \quad a_3 + b_3 = 10/3$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{10}{3} \quad (\text{Devamı 313'te})$$

Uygulamalar:

1- $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + 1$ fonksiyonunun değişimini inceleyerek grafiğini çiziniz ?

Not : $\sqrt[n]{f(x)}$ fonksiyonunun tanım kümesi n 'in durumuna göre değişiyor.

n tek ise fonksiyonun tanım aralığı (kümesi), tüm $\mathbb{R}$ 'dir. n çift ise tanım aralığı, $f(x) \geq 0$ olan noktalar kümesidir.

O halde bu fonksiyon tüm $\mathbb{R}$ de tanımlıdır. ($n=3$ olduğu için)

$$x=0 \text{ için } y = \sqrt[3]{(-2)^2} + 1 = \sqrt[3]{4} + 1 \quad (0, \sqrt[3]{4} + 1)' \text{ de } y \text{ eksenini keser.}$$

$$y=0 \text{ için } \sqrt[3]{(x-2)^2} = -1 \quad x \text{ eksenini kesilmez.}$$

Asimptotlar : fonksiyon sürekli olduğundan dikey asimptot yoktur.

Eğik asimptot vardır. (olabilir)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x-2)^2} + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x-2)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1$$

$$= \infty + 1 = \infty \quad (\text{yatay asimptot yoktur, eğik asimptot olabilir.})$$

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad m_1 \neq 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{x^3}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x^3}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})}{x^3}} + 0 = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{x}} = \frac{1 - \frac{4}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\infty} = 0$$

1. eğik asimptot yoktur. $m_2 = 0$ ikinci eğik asimptot yoktur.

Ekstremum noktaları ;

$$y = (x-2)^{2/3} + 1$$

$$y' = \frac{2}{3}(x-2)^{-1/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \neq 0 \quad \text{hiçbir } x \in \mathbb{R} \text{ için } y' = 0 \text{ olamaz.}$$

Fonksiyon $x=2$ noktasında kritik noktaya sahiptir.

$x > 2$ için $f'(x) > 0$
 $x < 2$ için $f'(x) < 0$ } $x=2$ de min. değerini alır.

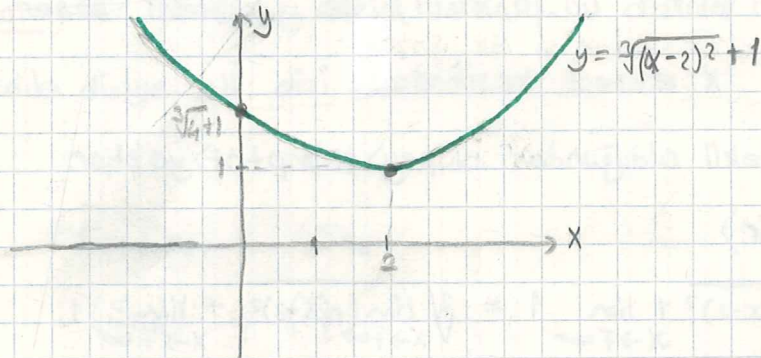
$$f''(x) = y'' = \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \right)' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} \neq 0 \quad \text{hiçbir } x \in \mathbb{R} \text{ için } y'' = 0 \text{ olamaz}$$

büküm noktası yoktur.

$$y'' = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} > 0 < 0$$

$y'' < 0$ o halde $x=2$ de içbükeydir.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		-	+
y	$+\infty$	$\sqrt[3]{4}+1$	1	$+\infty$



2- $y = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun değişimini inceleyerek, grafiğini çiziniz.

$x=0$ da tanımsız. $\mathbb{R} - \{0\}$ da tanımlıdır.

$x \neq 0$ için $y = \text{tanımsız } (\infty)$

$y=0$ için $x = \text{tanımsız } (\infty)$

Düsey asimptot yoktur. Sürekli olduğu için.

311

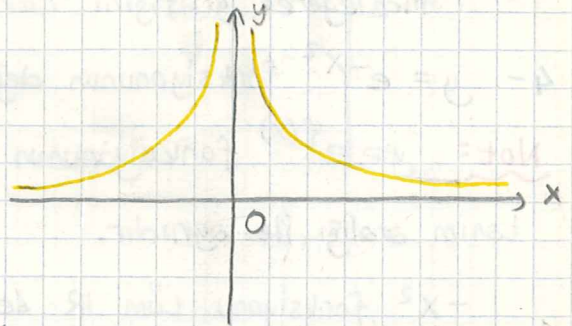
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ yatay olmadığı için eğik asimptot yoktur.

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{0 - 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

$y' = -\frac{2}{x^3} \neq 0$ olamaz. ($x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $y' = 0$ olamaz)

Ekstremum noktası yoktur.

X	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		+	-
y	0	∞	0



Fonksiyon, eksenleri hiçbir noktada kesmez.

3- $y = \sqrt{2x+9}$ fonksiyonunun değişimini inceleyerek grafigini çiziniz.

$2x+9 \geq 0$ da tanımlıdır.

$$x \geq -\frac{9}{2} \quad \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right)$$

$y=0$ için $x = -9/2$ $(-9/2, 0)$ da x eksenini keser.

$x=0$ için $y=3$ $(0, 3)$ de y eksenini keser.

Düsey asimptot yoktur. (Tanım aralığında sürekli olduğu için.)

Yatay asimptot, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x+9} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x+9} = \infty$ yoktur.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+9}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+9}{x^2}} = 0$$

birinci eğik asimptot yoktur. ikincisi de yoktur.

$$y' = ((2x+9)^{1/2})' = \frac{1}{2} (2x+9)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+9}} \neq 0$$

$x \in [-9/2, +\infty)$ için $y' \neq 0$ dir.

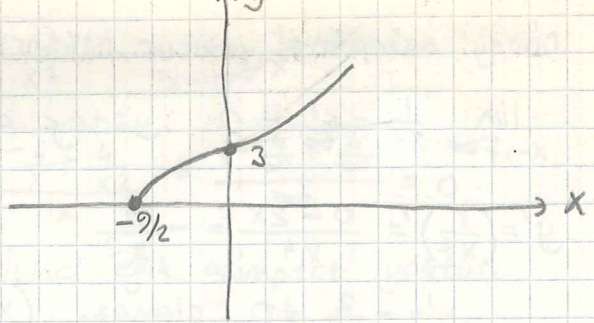
$-9/2$ noktası kritik nokta olup, bu değerin sağındaki tüm x ler için $y' > 0$ dir. $-9/2$ minimum noktasıdır. ($x > a$ için $f'(x) < 0$)

$$\text{Büküm noktası için, } y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2x+9}}\right)' = \frac{\sqrt{2x+9} \cdot 0 - \frac{1}{2} (2x+9)^{-1/2} \cdot 2}{2x+9}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2x+9} (2x+9)} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2x+9)^3}} < 0 \Rightarrow y'' < 0$$

fonksiyon içbükeydir.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{2}$	0	$+\infty$
y'	Tanım aralığı			
y	$-\infty$	0	3	$+\infty$



Ödev // $y = \sqrt{3 + 6x - 9x^2}$ değişimini inceleyerek grafiğini çiziniz.

4- $y = e^{-x^2}$ fonksiyonunun değişimini inceleyerek grafiğini çiziniz.

Not: $y = e^{f(x)}$ fonksiyonunun tanım aralığı $f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığı ile aynıdır.

$-x^2$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ de sürekli, tanımlıdır.

$y = e^{-x^2}$ de $\mathbb{R}$ de tanımlıdır.

$x=0$ için $e^0=1$ $(0,1)$ de y eksenini keser.

$y=0$ için $e^{-x^2} \neq 0$ x eksenini kesmez.

(Üstel fonksiyon her zaman için $(+)$ olduğundan $y=0$ olan hiçbir değer yoktur.)

Yatay ve dikey asimptotları,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$e > 1 \approx 2,7$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y=0$ (x eksen) yatay asimptot

$y = e^{-x^2}$ fonksiyonunun tanımsız yapan hiçbir x noktası olmadığından

dikey asimptot yoktur. Eğik asimptot da yoktur.

$$y' = (e^{-x^2})' = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \underbrace{\ln e}_1 \neq 0 \text{ dir}$$

Ödev // $y = e^{2x+1}$

Not // $e^{-x^2} > 0$ olduğundan kritik nokta $x=0$ dir.

Ödev // $y = e^{x^3+2x}$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array} \right\} x=0 \text{ max. noktasıdır.}$$

$$y' = -2x e^{-x^2}$$

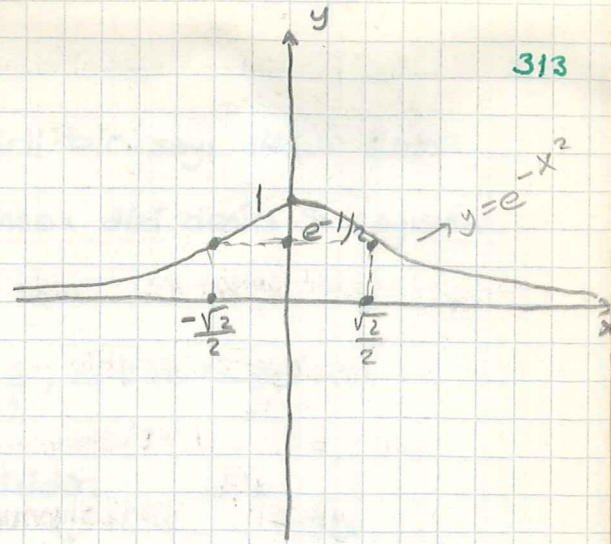
$$y'' = -2e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(-2x)$$

$$= -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$

$$= -2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$y''=0 \text{ için } x \text{ noktaları } \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
y'		+	0	-	
y	0	$e^{-1/2}$	1	$e^{1/2}$	0



(S: 309 dan devam)

2- $(a_n)(b_n) = (a_n \cdot b_n)$

$$(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots)$$

Örnek,, $a_n = 2n-3$ $b_n = \frac{1}{n}$

$$(a_n)(b_n) = \left((2n-3) \frac{1}{n} \right) = \frac{2n-3}{n} = 2 - \frac{3}{n}$$

$$= -1, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \dots, 2 - \frac{3}{n}, \dots$$

3- $(a_n), (b_n)$ iki dizi ve $(b_n) \neq 0$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \quad n=1, 2, \dots$$

Örnek,, $(a_n) = 2n-3$ $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{2n-3}{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (n(2n-3))_{n \in \mathbb{N}}$$

4- $c \in \mathbb{R}$,

$$c(a_n) = (c \cdot a_n)$$

Örnek,, $(a_n) = 2n-3$ $c=8$ ise

$$(c(a_n)) = (8(2n-3))_{n \in \mathbb{N}} = (16n-24)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$n=1, 2, \dots$$

$$(-8, 8, 24, \dots, 16n-24, \dots)$$

(Devamı S: 315'te)

1- Yakınsak Diziler :

315

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verilmiş olsun. S sonlu ve belirli bir sayı olmak üzere eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ oluyorsa bu diziye yakınsak dizi denir. S sayısına da bu dizinin limiti denir.

Örnek,, $\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad S_n = \frac{n}{n+1} \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \rightarrow 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ bu dizi yakınsak bir dizedir.

2- İraksak Diziler :

Dizinin S_n genel terimi n ile birlikte sınırsız olarak büyüyorsa bu diziye ıraksak dizi denir. Yani limit sonsuza gidiyorsa,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ bu dizi ıraksaktır.

Örnek,, $S_n = n^2 \quad (n^2)_{n \in \mathbb{N}} \quad 1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots \rightarrow \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ bu dizi ıraksak bir dizedir.

3- Belirsiz Diziler :

$n \rightarrow \infty$ olduğu zaman dizinin S_n genel terimi sonlu veya sonsuz hiçbir limite yaklaşmazsa, bu diziye belirsiz dizi denir.

Örnek,, $S_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

- Artan ve Azalan Diziler -

Tanım : $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Eğer $n' > n$ olduğunda $S_{n'} > S_n$ oluyorsa bu diziye monoton artan (= artan) dizi denir.

Bu tanıma şöyle de verebiliriz; Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n < S_{n+1}$ oluyorsa bu diziye monoton artan dizi denir.

Tanım : $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Eğer $n' > n$ olduğunda $S_{n'} < S_n$ oluyorsa bu diziye monoton azalan (= azalan) dizi denir.

Bu tanıma şöyle de verebiliriz; Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n > S_{n+1}$ oluyorsa bu diziye azalan dizi denir.

Tanım: Eğer bir dizi, monoton artan veya monoton azalan ise, bu diziye monoton dizi denir.

Tanım: Eğer $n' > n$ olduğunda $S_{n+1} \geq S_n$ oluyorsa bu diziye azalmayan dizi denir.

Tanım: Eğer $n' > n$ olduğunda $S_{n+1} \leq S_n$ oluyorsa bu diziye artmayan dizi denir.

1. Örnek // $S_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(S_{n+1} > S_n \Rightarrow S_{n+1} - S_n > 0 \text{ artan})$$

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$(S_{n+1} < S_n \Rightarrow S_{n+1} - S_n < 0 \text{ azalan})$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

0 halde bu dizi artan bir dizedir.

2. Örnek // $S_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ azalan bir dizi olduğunu gösteriniz.

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} - S_n = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2^n} = 1 \text{ yakınsaktır.}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \text{ azalan bir dizedir.}$$

3. Örnek // $S_n = \frac{1}{n}$

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \text{ azalandır.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ yakınsak bir dizedir.}$$

Sınırlı Diziler :

Bir $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ 'nin her değeri için, $S_n < A$ olacak şekilde belirli ve sonlu bir A sayısı varsa, bu diziye yukardan sınırlıdır denir.

Yine aynı şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n > B$ olacak şekilde sonlu ve belirli bir B sayısı varsa, bu diziye aşağıdan sınırlıdır denir.

Bir dizi hem aşağıdan, hem de yukarıdan sınırlıysa, bu diziye sınırlıdır denir.

Örnekler:

1- $S_n = \frac{n}{n+1} \quad (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \rightarrow 1$

$A=2$ bu dizi yukarıdan sınırlı bir dizidir.

$\forall S_n, S_n < A=2$

$B = \frac{1}{3}$ bu dizi aşağıdan da sınırlıdır.

$\forall S_n, S_n > \frac{1}{3} = B$

O halde bu dizi sınırlı bir dizidir.

2- $S_n = 2^n \quad (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots \rightarrow \infty$

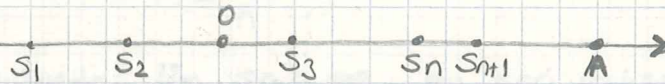
$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ İraksak dizidir.

$B=1$ ise dizi aşağıdan sınırlıdır ama yukarıdan sınırlı değildir.

Teorem 1: Yukarıdan sınırlı artan bir dizi veya aşağıdan sınırlı azalan bir dizi yakınsaktır.

2: Yukarıdan sınırlanmamış artan bir dizi veya aşağıdan sınırlanmamış azalan bir dizi ıraksaktır.

İspat 1 //



Her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n < A \quad S_{n+1} > S_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq A$

2, $\lim S_n = \infty$ Dizi yukarıdan sınırlı olmadığı için ve arttığı için ıraksaktır, aynı şekilde aşağıdan sınırlı değilse ve azalorsa ıraksaktır.

("İraksak mı, yakınsak mı" yerine "karakteristiği nedir" kullanılabilir.)

$S_n = \frac{n}{n+1}$ yakınsaktır.

$S_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ "

Dizilerin yakınsaklığını daha değişik şekilde verirsek,

Tanım: Bir $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$\forall n \geq n_0$ için $|s_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, bu takdirde $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s 'ye yakınsıyor denir. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$

- SERİLER -

$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ dizisi verilmiş olsun. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ toplamına seri denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ u 'ya serinin terimleri denir. u_n genel terimdir.

$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$ Buna bu serinin n -inci kısmi toplamı denir.

Örnek // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ genel terimi

Örnek // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ genel terimi

- Serilerde Yakınsaklık, İraksaklık ve Belirsizlik -

Tanım: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

Eğer bu serinin $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa bu takdirde bu seriye yakınsaktır denir.

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Bu takdirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \quad \text{Bu } s \text{ sayısına } \underline{\text{serinin toplamı}} \text{ denir.}$$

Tanım: Eğer bir serinin $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kısmi toplamlar dizisi ıraksaksa bu seriye de ıraksak seri denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

Tanım: Eğer $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kısmi toplamlar dizisi belirsizse bu seriye de belirsizdir denir.

Örnek // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

- Geometrik Seri -

1. terimi 1, ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ dir.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \dots$$

$$= 1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$S_n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2$$

$$S = 2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \quad \text{bu seri yakınsaktır}$$

Örnek,, $U = \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (harmonik seri)

Serisinin karakterini (yakınsaklık, ıraksaklık) inceleyin.

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m} > 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m} > m \cdot \frac{1}{2}$$

$m \rightarrow \infty$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ bu seri ıraksak bir seridir.

Örnek,, $U_n = (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad S_n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n \quad (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

n çift ise toplam 0

n tek ise toplam -1 olur. $n = \infty$ ise dizi belirsizdir.

Teorem: Bir serinin yakınsak olması için genel teriminin $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşması gerekir, fakat yetmez.

İspat,, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

$$S_{n-1} = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = U_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$$

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Örnek,, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad U_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Teorem: Bir seride baş taraftan sonlu tane terim kaldırılırsa serinin karakteri değişmez.

İspat,, $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \dots + U_p + U_{p+1} + \dots + U_n + \dots$

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} U_k = U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n + \dots$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$$

$$S_{n-p} = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$$

$$S_{n-p} = S_n - S_p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{S_n}^S - \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{S_p}^{S_p} = S - S_p$$

- Bir Serinin Kalanı -

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \underbrace{U_1 + U_2 + \dots + U_k}_{S_k} + \underbrace{U_{k+1} + \dots + U_n + \dots}_{r_k} \quad \dots (1)$$

$$r_k = U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_n + \dots$$

Bu r_k toplamına (1) serisinin k . mertebeden kalanı denir. Eğer serimiz yakınsak, toplamı S ise $S = S_k + r_k$ dir.

Teorem: Yakınsak bir seride k . mertebeden kalan $k \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşır.

$$(\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0)$$

İspat,, $r_k = S - S_k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S - S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} S - \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S - S = 0$$

- Seriler Üzerinde İşlemler -

1) $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$

Bu iki serinin terim terime toplanmasıyla elde edilen yeni seri yine yakınsaktır. Bu yeni seriye bu iki serinin toplamı denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n) = S + t$$

İspat //

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n) = (U_1 + V_1) + (U_2 + V_2) + \dots + (U_n + V_n) + \dots$$

$$\delta_n = (U_1 + V_1) + (U_2 + V_2) + \dots + (U_n + V_n)$$

$$= \underbrace{(U_1 + U_2 + \dots + U_n)}_{S_n} + \underbrace{(V_1 + V_2 + \dots + V_n)}_{t_n}$$

$$\delta_n = S_n + t_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = S + t$$

2) $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere k sayısı ile bu serinin her bir teriminin çarpılmasından elde edilen seri yine yakınsaktır.

$$k \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} k U_n = k U_1 + k U_2 + \dots + k U_n + \dots$$

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \sum_{n=1}^{\infty} k U_n \quad \delta_n = k U_1 + k U_2 + \dots + k U_n$$

$$= k \underbrace{(U_1 + U_2 + \dots + U_n)}_{S_n} = k S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot S_n)$$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k \cdot S$$

Ödev // $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n - \sum_{n=1}^{\infty} V_n = S - t$

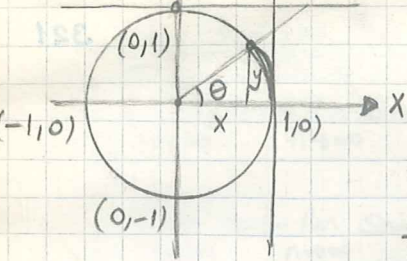
- TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR -

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ve sabit $T \in \mathbb{R}$ için eğer $f(x+T) = f(x)$ oluyorsa bu f fonksiyonuna periyodik fonksiyon (ya da devirli), T 'ye ise f nin periyodu (veya deviri) denir.

Örnek // $f(x) = \sin x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\sin(x+2\pi) = \sin x$ $T = 2\pi$

Örnek // $f(x) = \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\cos(x+2\pi) = \cos x$ $T = 2\pi$

Ödev // f , periyodik bir fonksiyon ve T de onun periyodu ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(x+nT)$ ve yine $f(x) = f(x-nT)$ olduğunu gösteriniz.



$$y = \sin \theta \quad x = \cos \theta$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 sin eksen $\downarrow$ cos eksen

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta \quad \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta$$

$\sin(x+2\pi) = \sin x$ fonksiyonu sürekli'dir.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\sin(x+\Delta x) - \sin x] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+\Delta x - x}{2} \cos \frac{x+\Delta x + x}{2}}{2} \\
 &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| = 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \underbrace{\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right|}_{\leq 1}$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right| = 2 \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin(\pi/2 - x)}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$y = \sin x$ fonksiyonu

$$y = f(x) = \sin x \quad 2\pi = \text{periyodu}$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$$

$$f(x) = \sin x \quad f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{x + \Delta x - x}{2} \right) \cos \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right)$$

$$|\sin x| \leq |x|$$

$$|\cos x| \leq 1$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \quad \dots (1) \quad (\Delta y \text{ ye esit})$$

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right|$$

$$= 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \cdot \left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right| = \Delta x$$

$y = \sin x$ fonksiyonu daima sürekli dir.

$y = \sin x$ fonksiyonunun türevi

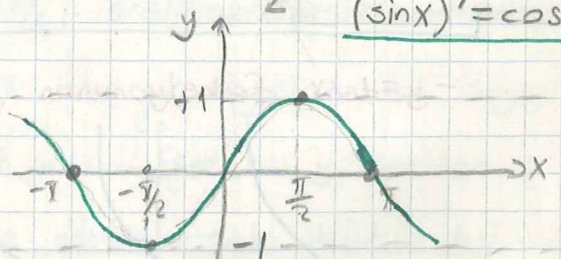
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

$$\underline{(\sin x)' = \cos x}$$

$y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
f(x)	0	-1	0	1	0



- $y = \cos x$ fonksiyonu -

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad (\text{periyodu } 2\pi \text{ dir.})$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$y = \cos x$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

- $y = \cos x$ fonksiyonunun türevi -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d(\sin(\frac{\pi}{2} - x))}{dx}$$

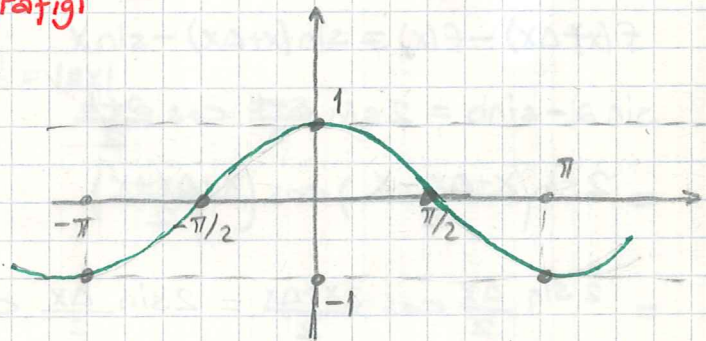
$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin u \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \frac{dy}{du} = \cos u \quad \frac{du}{dx} = -1$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\underline{(\cos x)' = -\sin x}$$

- $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiği -

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
f(x)	-1	0	1	0	-1



- $y = \tan x$ fonksiyonu -

$y = \tan x$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyondur ve periyodu π dir.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x = 0$$

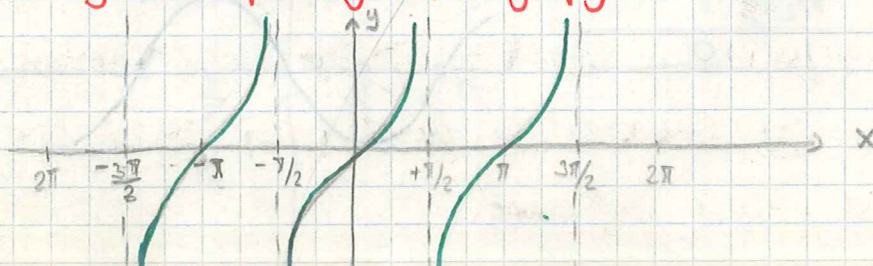
$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- $y = \tan x$ fonksiyonunun türevi -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\underline{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

- $y = \tan x$ fonksiyonunun grafiği -



- $y = \cot x$ fonksiyonu -

$$y = f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cot x = \cot(x + \pi)$$

(Periyodu π dir.)

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, k \in \mathbb{Z}$$

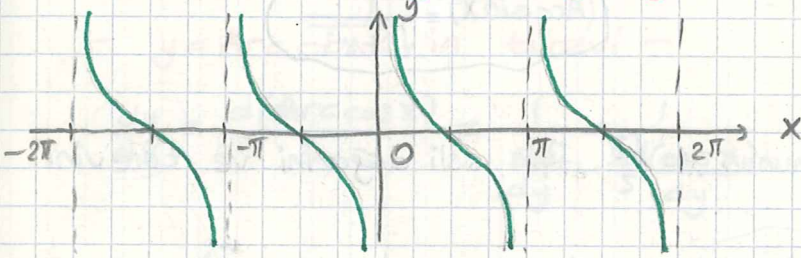
$x = k\pi$ değerleri düşey asimptot.

- $y = \cot x$ fonksiyonunun türevi -

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) = (\cot x)' = (\operatorname{cosec}^2 x)$$

- $y = \cot x$ fonksiyonunun grafiği -

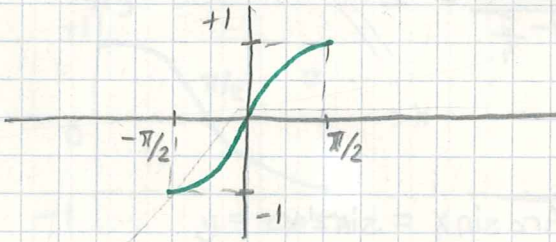


$$x = k\pi$$

$$-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

- Ters Trigonometrik Fonksiyonlar -

$y = \arcsin x$ fonksiyonu ($y = \sin^{-1} x$)



$$\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [-1, +1]$$

$$x \longrightarrow \sin x$$

1:1 ve örten

$$\sin^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$x \longrightarrow \sin^{-1} x$$

$$\operatorname{Arcsin} : \quad \text{veya} \quad x \longrightarrow \operatorname{Arcsin} x$$

$$y = \operatorname{Arcsin} x$$

$$y = \operatorname{Arcsin} x \Leftrightarrow x = \sin y$$

- $y = \arcsin x$ in geçitli dalları -

$x = \sin y$ bağıntısında y yayı $[-\pi/2, +\pi/2]$ aralığına kısıtlanmıyorsa bu takdirde $[-1, +1]$ aralığında değişmekte olan x sayısına bu sayıyı sinüs kabul eden sonsuz sayıda y karşılık gelirdi. Eğer bu y 'lerden $[-\pi/2, +\pi/2]$ aralığına düşen y 'yi $\operatorname{Arcsin} x$ ile gösterirsek bütün bu y 'ler aşağıdaki gibi iki grupta toplanır:

$y = \text{Arcsin } x$ $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere (Asliye ya esas değeri)

① $y = \text{Arcsin } x + 2k\pi$ ② $y = \pi - \text{Arcsin } x + 2k\pi$

Örnek //

$y = \text{arcsin}(\frac{1}{2})$ değerini bulunuz.

$$y = \text{Arcsin } \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sin y \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} \quad \text{Arcsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} //$$

$$y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- $y = \text{Arcsin } x$ 'in türevi -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{Arcsin } x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\sin y)}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

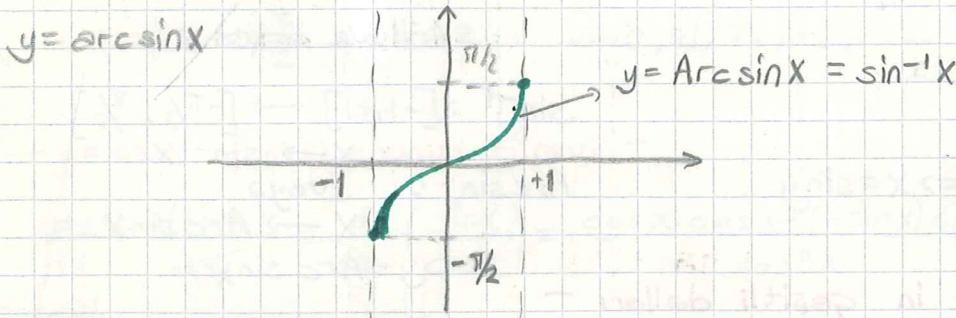
$$(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Örnek // $y = \text{Arcsin } x$ fonksiyonunun $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ için asli değerini ve türevini hesaplayınız.

$$y = \text{Arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin y \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

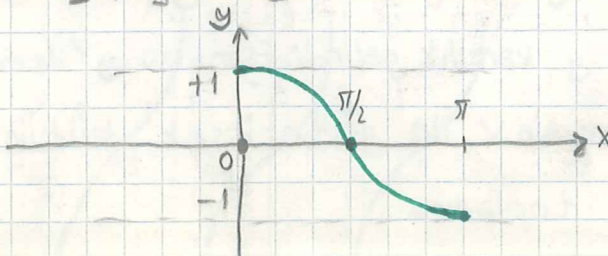
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 2 //$$

- $y = \text{arcsin } x$ 'in grafiği -



- $y = \text{arccos } x$ fonksiyonu -

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$$



$$\cos^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$\text{Arccos} : [-1, +1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$x \longrightarrow \text{Arccos } x = y$$

$$y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos y$$

- $y = \arccos x$ fonksiyonunun eşitli dallerı -

$$\textcircled{1} \quad y = \text{Arccos } x + 2k\pi$$

$$\textcircled{2} \quad y = 2\pi - \text{Arccos } x + 2k\pi$$

Örnek, $y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ değerlerini bulunuz.

$$y = \text{Arccos } \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos y \quad y = \frac{\pi}{4} \quad y \in [0, \pi]$$

$$y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- $y = \text{Arccos } x$ in türevi -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{Arccos } x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\cos y)}{dy}}$$

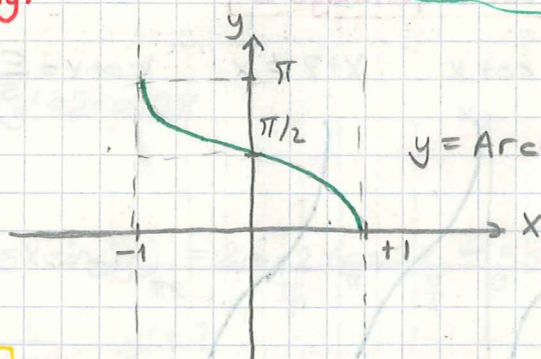
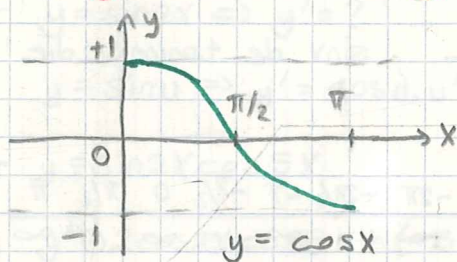
$$y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$= -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$$

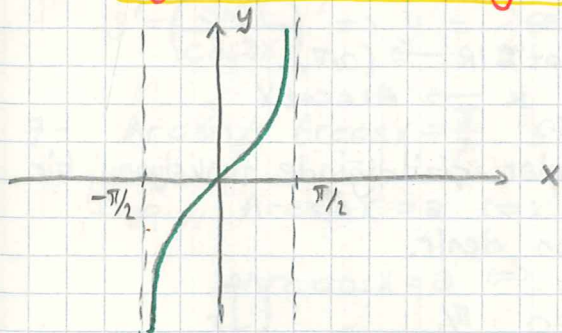
$$(\text{Arccos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \arccos x$ in grafiği -



$$y = \text{Arccos } x = \cos^{-1} x$$

- $y = \arctan x$ fonksiyonu -



$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

1:1 ve örten.

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \longrightarrow \text{Arctan } x = y$$

$$y = \text{Arctan } x \Leftrightarrow x = \tan y$$

- $y = \arctan x$ in aslı (esas) değerleri -

$$y = \text{Arctan} x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Örnek // $y = \arctan \sqrt{3}$ değerini bulunuz.

$$y = \text{Arctan} \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \tan y \quad y = \frac{\pi}{3}$$

$$y = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- $y = \text{Arctan} x$ in türevi -

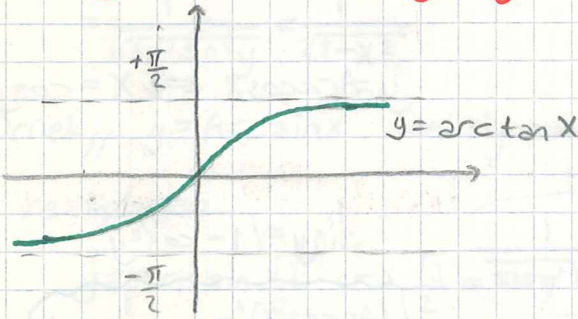
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{Arctan} x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} =$$

$$y = \text{Arctan} x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$= \frac{1}{\frac{d(\tan y)}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\text{Arctan} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

- $y = \arctan x$ in grafiği -



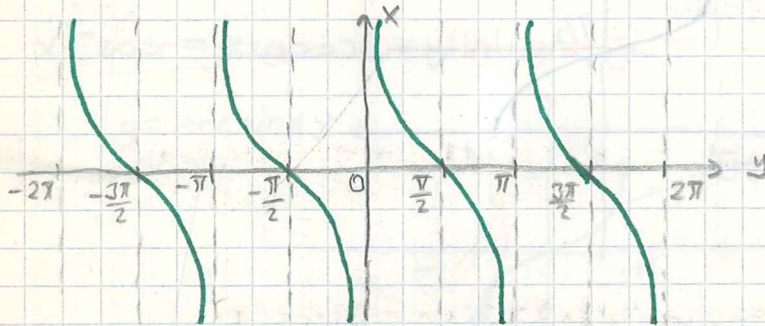
- $y = \text{Arccot} x$ fonksiyonu -

$$\cot(x + \pi) = \cot x$$

$$x + \pi \neq x$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\sin x$ de tanımsızdır.



x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
	$+\infty$	0	∞	0	∞	0	∞

$$\cot x = (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$$x \rightarrow \text{Arccot} x$$

Not: Bir fonksiyonda x eksenine dik doğrular çizildiğinde fonksiyonu bir noktada kesiyorsa fonksiyona 1:1 fonksiyon denir.

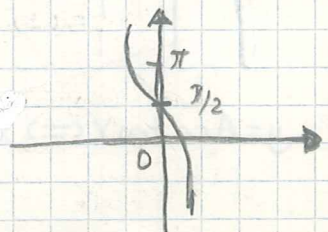
$$\text{Arccot} x = y$$

$$\text{Arccot} x = 0 \quad \pi/2$$

$$x = \cot y \text{ örtendir denir.}$$

$$\text{Arccot} x = \infty$$

$$(\text{Arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$



Problemler :

1- $\text{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$

$\text{Arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\text{Arccos}(-1) = \pi$

$\text{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\text{Arctan} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

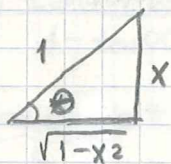
$\text{Arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\text{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Arcsin} X = y &\Leftrightarrow \sin y = X \\ \text{Arctan} X = y &\Leftrightarrow \tan y = X \\ \text{Arccot} X = y &\Leftrightarrow \cot y = X \\ \text{Arccos} X = y &\Leftrightarrow \cos y = X \end{aligned} \right\}$$

2- $\text{Arcsin} X = \theta$ ise $\cos \theta, \cot \theta, \tan \theta = ?$

$\sin \theta = X$



$\cos \theta = \sqrt{1-X^2}$

$\tan \theta = \frac{X}{\sqrt{1-X^2}}$

$\cot \theta = \frac{\sqrt{1-X^2}}{X}$

3- $y = \text{Arccot} X \quad X = \cot y$

$$1 = -(1 + \cot^2 y) y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} \Rightarrow y' = -\frac{1}{1 + X^2}$$

$$y = \text{Arccot} u \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

4- $y = \sin 2X \Rightarrow y' = ?$

$y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u' \Rightarrow y' = 2 \cos 2X$

5- $y = \sin 2X \cos 5X$

$$y' = 2 \cos 2X \cos 5X + (-5 \sin 5X \sin 2X) = 2 \cos 2X \cos 5X - 5 \sin 5X \sin 2X$$

6- $y = \sec^2 X \tan X \quad \sec X = \frac{1}{\cos X} \quad y' = ?$

$$y' = \left(\frac{\sin X}{\cos^3 X} \right)' \Rightarrow y' = 2 \sec X \cdot \sec X \tan X + \tan X + (1 + \tan^2 X) \sec^2 X$$

7- $\text{Arcsin} X + \text{Arccos} X = \frac{\pi}{2}$ old. göst ?

$$\text{I.yol} // \left. \begin{aligned} \text{Arcsin} X = a &\Leftrightarrow \sin a = X \\ \text{Arccos} X = a &\Leftrightarrow \cos a = X \end{aligned} \right\} \sin a = \cos a$$

$$\text{II.yol} // y = \text{Arcsin} X + \text{Arccos} X = ?$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-X^2}} = 0$$

Sabit sayının türevi 0'dır. O halde $\text{Arcsin} X$ ve $\text{Arccos} X$ 'in türevi sabittir. Bu sabitliğe a dersek

$$x=0 \quad 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

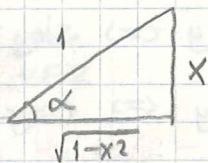
$$x=1 \quad \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arccos } x = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$8- \tan(\underbrace{\text{Arcsin } x}_{\alpha}) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{old. göst. ?}$$

$$\text{Arcsin } x = \alpha$$

$$x = \sin \alpha$$

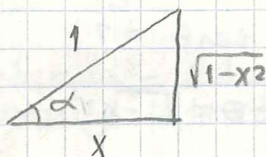


$$\tan \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \tan(\text{Arcsin } x)$$

$$9- \sin(\underbrace{\text{Arccos } x}_{\alpha}) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{old. göst. ?}$$

$$\text{Arccos } x = \alpha$$

$$\cos \alpha = x$$



$$\sin \alpha = \sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$10- \sin(\text{Arctan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$11- \cos(\text{Arctan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$12- \sin(\underbrace{\text{Arcsin } x}_{\alpha} + \underbrace{\text{Arcsin } y}_{\beta}) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \quad \text{old. göst. ?}$$

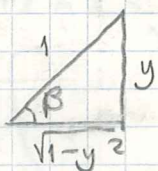
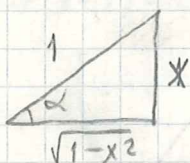
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\text{Arcsin } x = \alpha$$

$$x = \sin \alpha$$

$$\text{Arcsin } y = \beta$$

$$\sin \beta = y$$



$$\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

$$13- \cos(\text{Arctan}(\sin(\text{Arccot } x))) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$$

$$\text{Arccot } x = \alpha$$

$$\cot \alpha = x$$

$$\cos(\text{Arctan}(\sin \alpha))$$

$$\text{Arctan}(\sin \alpha) = \beta$$

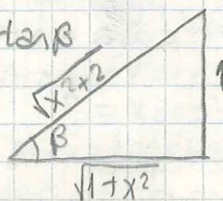
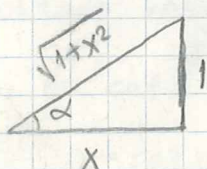
$$\tan \beta = \sin \alpha$$

Bu tür sorularda
en isten başlanarak
gözüm yapılır.

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \tan \beta$$

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$$



14- $\sin(\underbrace{\text{Arccot}(\tan(\underbrace{\text{Arccos} x}_{\alpha}))}_{\beta}) = x$ old. göst ? 331

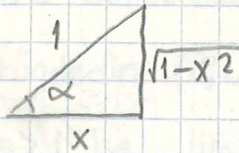
$$\text{Arccos } x = \alpha$$

$$x = \cos \alpha$$

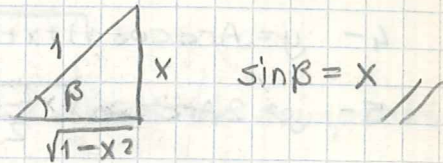
$$\sin(\underbrace{\text{Arccot}(\tan \alpha)}_{\beta})$$

$$\text{Arccot}(\tan \alpha) = \beta$$

$$\cot \beta = \tan \alpha$$



$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \cot \beta$$



15- $\underbrace{\text{Arctan } a}_{\alpha} + \underbrace{\text{Arctan } b}_{\beta} = \text{Arc tan } \frac{a+b}{1-ab}$?

$$\text{Arctan } a = \alpha \quad \text{Arctan } b = \beta$$

$$\tan \alpha = a \quad \tan \beta = b$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{a+b}{1-ab} \Rightarrow \alpha + \beta = \text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab}$$

16- $\underbrace{\text{Arctan } a}_{\alpha} + \underbrace{\text{Arctan } b}_{\beta} + \underbrace{\text{Arctan } c}_{\gamma} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow ab+ac+bc=1$ old. göst ?

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \tan(\alpha + \beta + \gamma) = \tan \frac{\pi}{2} \quad \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan(\beta + \gamma)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(\beta + \gamma)} = \infty$$

$$1 - \tan \alpha \tan(\beta + \gamma) = 0$$

$$1 - \frac{a \tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} = 0 \Rightarrow 1 - a \left(\frac{b+c}{1-bc} \right) = 0$$

$$\frac{1-bc-ab-ac}{1-bc} = 0$$

$$1-bc-ab-ac=0$$

$$ab+ac+bc=1 //$$

17- $\text{Arctan } 2 - \text{Arctan } \frac{3}{4} = \text{Arc cot } 2$?

18- $\text{Arctan}(1+k) - \text{Arctan } k = \text{Arccot}(1+k+k^2) \quad k \in \mathbb{N}$?

19- Ortalama değer teoremini kullanarak,

$$|\sin B - \sin A| \leq B - A \text{ olduğunu gösteriniz?}$$

$$f'(c) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \quad f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \quad \exists c \in [A, B]$$

$$\frac{\sin B - \sin A}{B - A} = \cos C \quad -1 \leq \cos C \leq 1 \quad (B-A) \text{ ile çarpalım.}$$

$$-(B-A) \leq \cos C \cdot (B-A) \leq B-A$$

$$-(B-A) \leq \sin B - \sin A \leq B-A$$

$$|\sin B - \sin A| \leq B - A$$

Problemler : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz?

1- $y = \text{Arc} \cos x^2 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

2- $y = \text{Arc} \tan \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2+1} = (\text{Arccot} x)'$

3- $y = \text{Arc} \sin(\tan^2 x) \Rightarrow y' = \frac{2 \tan x \sec x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

4- $y = \text{Arccos} \sqrt{1+x+x^2} \Rightarrow y' = \frac{-(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}(\sqrt{1-x^2-x})}$

5- $y = 2 \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \right) - \sqrt{x^2-4} \Rightarrow y' = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

6- $y = 2x - x(\text{Arcsin} x)^2 - 2\sqrt{1-x^2} \cdot \text{Arcsin} x \Rightarrow y' = \text{Arcsin} x \left(\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{Arcsin} x \right)$

7- $y = \text{Arcsin} \frac{x-2}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{x}(x+2)}$

8- $y = \text{Arccos} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \Rightarrow y' = -\frac{\sqrt{2(a^2+x)}}{a(x^2+a^2)^{3/2}}$

9- $y = x \text{Arcsin}(\sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \text{Arcsin} \sqrt{1-x^2}$

10- $y = \frac{a^2}{2} \text{Arcsin} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{a^2-x^2}$

11- $y = \text{Arcsin}(\cos x) \Rightarrow y' = -1$

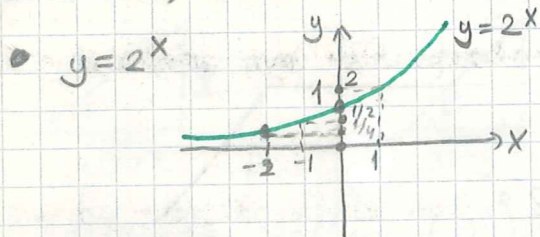
12- $y = x \left(\text{Arcsin} \frac{x}{2} \right)^2 - 2x + 2\sqrt{4-x^2} \cdot \text{Arcsin} \frac{x}{2} \Rightarrow y' = \left(\text{Arcsin} \frac{x}{2} \right) \left(\text{Arcsin} \frac{x}{2} \cdot (1-x) \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \right)$

- ÜSTEL FONKSİYON VE LOGARİTMA FONKSİYON -

Üstel Fonksiyon :

$a > 0$ ve $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = y = a^x$ fonksiyonuna Üstel fonksiyon denir.

a : taban, x : üs



$x = -2 \Rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4} = y \quad (-2, \frac{1}{4})$

$x = -1 \Rightarrow y = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad (-1, \frac{1}{2})$

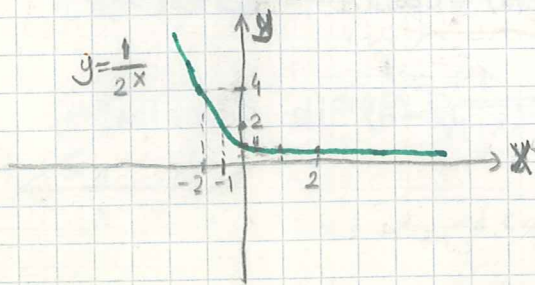
$x = 0 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2^0 = 1 \quad (0, 1)$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \quad (1, 2)$

• $y = 3^x \quad (-2, \frac{1}{9}), (-1, \frac{1}{3}), (0, 1), (1, 3)$

• $y = f(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^x = \frac{1}{2^x}$

$(-1, 2), (-2, 4), (0, 1), (2, \frac{1}{4}), (1, \frac{1}{2})$



$y = 2^x$ 'in y eksenine göre simetridir.

Üstel fonksiyonların özellikleri :

- 1- $a > 0$ olmak üzere $y = a^x$ fonksiyonu x 'in her değeri için tanımlı ve süreklidir.
- 2- $a > 0$ olmak üzere a^x her zaman için pozitiftir. Eğri daima x eksenini üstündedir. $(0,1)$ de keser. ($a^0 = 1$ dir)
- 3- $a > 1$ ise $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ (yani x eksenini bir asimptottur)
- 4- $0 < a < 1$ ise $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

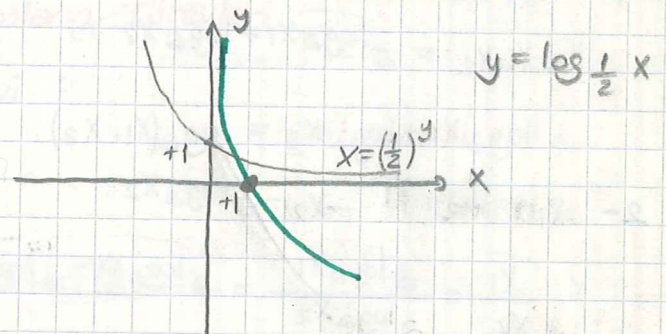
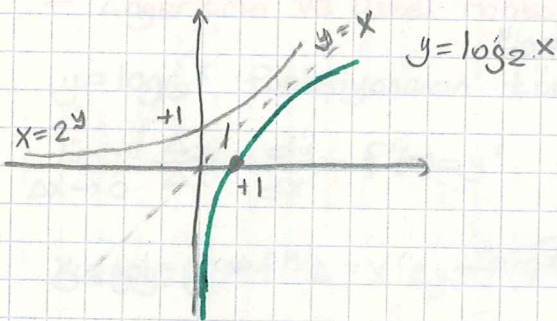
Logaritma Fonksiyon :

(monoton artan sürekli veya monoton azalan sürekli) $y = a^x$ fonksiyonu birebir ve örten olduğu için tersinden bahsedilebilir.

Dolayısıyla bu fonksiyonun tersi vardır ve bu logaritma fonksiyonudur.

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Logaritma fonksiyonunun özellikleri :



- 1- $y = \log_a x$ fonksiyonu sürekli ve monoton (azalan veya artan) bir fonksiyondur.
- 2- Pozitif a tabanının 1 den büyük veya 1 'den küçük olmasına göre, $y = \log_a x$ fonksiyonu $-\infty$ dan $+\infty$ 'a artan veya $+\infty$ dan $-\infty$ 'a azalan bir fonksiyondur.
- 3- Pozitif a tabanı ne olursa olsun $\log_a 1 = 0$ dir. Ve $\log_a a = 1$ dir.

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a a = y \Leftrightarrow a^y = a$$

$$1 = a^y \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$$

$$y = 1$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow \log_a 1 = 0$$

$$\Rightarrow \log_a a = 1$$

- 4- $a > 1$ ise 1'den büyük sayıların logaritması pozitif ve 1'den küçük sayıların logaritmaları negatiftir. Benzer şekilde, ($a > 0$ ve)
- $a < 1$ ise 1'den büyük sayıların logaritması negatif ve 1'den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir.

5- Yalnız pozitif sayıların logaritmaları vardır.

Logaritma Üzerinde İşlemler :

$$\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$$

1- $\log_a (X_1 \cdot X_2) = \log_a X_1 + \log_a X_2$

2- $\log_a \left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \log_a X_1 - \log_a X_2$

3- $\log_a x^m = m \log_a x$

4- $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ (logaritmada taban değiştirme)

5- $1 = \log_a b \cdot \log_b a \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
 $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$
 $x = b$

$$\log_b b = \log_a b \cdot \log_b a$$

İspat // $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \Rightarrow \underline{x = a^{\log_a x}}$

1- $x_1 = a^{\log_a x_1} \quad x_2 = a^{\log_a x_2}$

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} \quad x = a^y$$

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 \cdot x_2)$$

2- $x_1 = a^{\log_a x_1} \quad x_2 = a^{\log_a x_2}$

$$x \cdot \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2} \quad x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

3- $x = a^{\log_a x} \quad x^m = (a^{\log_a x})^m = a^{m \log_a x}$

$$x^m = a^{m \log_a x}$$

$$u = a^y \Rightarrow y = \log_a u \Rightarrow y = \log_a x^m$$

$$\Rightarrow m \log_a x = \log_a x^m //$$

4- $x = a^{\log_a x}$

$$\log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a$$

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$$

Soru // $\log_{10} 4000 = ?$

$$= \log_{10} (10^3 \cdot 4) = \log_{10} 4 + \log_{10} 10^3 = \log_{10} 4 + 3 \log_{10} 10 = \log_{10} 4 + 3 //$$

- Binom Formülü - (Newton Formülü)

$$x+a = x+a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^m = x^m + m/1! a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} a^2 x^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{p!} a^p x^{m-p} + \dots + a^m$$

$$\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

$$(x+a)^m = x^m + \binom{m}{1} a x^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 x^{m-2} + \dots + \binom{m}{p} a^p x^{m-p} + \dots + a^m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Tanım: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ serisi yakınsaktır. Bu serinin

toplamı olan sayıya e ile göstereceğiz. $e \approx 2,7$

- Logaritma ve Üstel Fonksiyonların Türevleri -

$y = \log_a x$ fonksiyonunun türevi :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$$

$$y = \log_a x = f(x) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x$$

$$= \frac{\log_a(x + \Delta x)}{\log_a x} = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m}_e \right] = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$m = \frac{x}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{\Delta x}{x}$$

$\Delta x \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

• Soru // $y = \sin kx \Rightarrow y^{(k)} = k^k \sin(kx + k\frac{\pi}{2})$ olduğunu gösteriniz.

Soru // $y = \cos kx \Rightarrow y^{(k)} = k^k \cos(kx + k\frac{\pi}{2})$ " "

$$\begin{aligned} \bullet y = \sin kx \text{ ise } y' &= k \cos kx = k \sin(kx + k\frac{\pi}{2}) \\ &= k [\sin kx \cos k\frac{\pi}{2} + \cos kx \sin k\frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$y'' = -k^2 \sin kx$$

$$y''' = -k^3 \cos kx$$

$$y^{(4)} = k^4 \sin kx \quad y^{(5)} = k^5 \cos kx$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos x = \cos x$$

$$\sin(kx + \frac{\pi}{2}) = \sin kx \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos kx = \cos kx$$

$$y' = k \cos kx = k \sin(kx + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(kx + \pi) = \sin kx \cos \pi + \sin \pi \cos kx = -\sin kx$$

$$y'' = -k^2 \sin kx = k^2 \sin(kx + 2\frac{\pi}{2})$$

$$\sin(kx + \frac{3\pi}{2}) = \sin kx \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \cos kx = -\cos kx$$

$$y''' = -k^3 \cos kx = k^3 \sin(kx + \frac{3\pi}{2})$$

$$\sin(kx + 2\pi) = \sin kx \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos kx = \sin kx$$

$$y^{(4)} = k^4 \sin(kx + 4\frac{\pi}{2})$$

$$y^{(k)} = k^k \sin(kx + k\frac{\pi}{2})$$

Soru // $y = \sin x \Rightarrow y^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$ olduğunu gösteriniz.

$$y' = \cos x \quad y'' = -\sin x \quad y''' = -\cos x \quad y^{(4)} = \sin x \quad y^{(5)} = \cos x$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$y' = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \quad \sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x = -\sin x$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}) \quad \dots \quad y^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$$

Soru // $y = \cos x \Rightarrow y^{(k)} = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$ old. göst. ?

Soru // Binom açılımını kullanarak,

$$(a+b)^n \equiv (a^n + b^n) \pmod{n}$$

$a \equiv b \pmod{n}$
(a'nın n ile bölümünden kalan b'dir.)

339

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n \equiv (a^n + b^n) \pmod{n}$$

$$\frac{a^n}{0} \bigg/ \frac{n}{0}$$

$$\frac{na^{n-1}b}{0} \bigg/ \frac{n}{0}$$

$$\frac{b^n}{0} \bigg/ \frac{n}{0}$$

Soru // $y = \arccos x^2$ türevi nedir?

$$y = \arccos u \quad y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad u = x^2 \quad u' = 2x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Soru // $y = \arctan \frac{1}{x}$

$$y = \arctan u \quad y' = \frac{u'}{1+u^2} \quad u = \frac{1}{x} \quad u' = -\frac{1}{x^2} \quad y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{x^2+1} //$$

$$y' = (\operatorname{Arccot} x)'$$

Soru // $y = \arcsin(\tan^2 x)$

$$y = \arcsin u \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad u = \tan^2 x \quad u' = 2 \tan x \sec^2 x$$

$$y' = \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^4 x}} = \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x} \sec x} = \frac{2 \tan x \sec x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$$

Soru // $y = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \right) - \sqrt{x^2-4}$

$$y' = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{1 + \frac{x^2-4}{4}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{4}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{4-x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{-\sqrt{x^2-4}}{x}$$

Soru // $y = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2}$

$$y' = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{x}{2}$$

$$y' = \frac{a}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-x^2} //$$

$$y = \log_a x \quad (a > 0) \Rightarrow x = a^y$$

$$\log_5 3 = a \Rightarrow 3 = 5^a$$

$$a > 1$$

sonst $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ old. göst.?

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

$$\log_a b \cdot \frac{\log_a a^1}{\log_a b} = 1$$

2) $\log_{10} 2 = a \quad \log_{10} 3 = b \Rightarrow \log 675 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$675 = 3^3 \cdot 5^2$$

$$\log 675 = \log(3^3 \cdot 5^2)$$

$$= \log 3^3 + \log 5^2$$

$$= 3 \log 3 + 2 \log 5 = 3b + 2 \log \frac{10}{2}$$

$$= 3b + 2 \log 10 - 2 \log 2$$

$$= 3b + 2 - 2a$$

3) $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{-x} = 4$

$$2^{x+2} - \frac{3}{2^x} = 4 \Rightarrow \frac{2^{2x+2} - 3}{2^x} = 4 \Rightarrow 2^{2x+2} - 3 = 4 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{2x+2} - 3 - 2^x \cdot 4 = 0$$

$$2^x = u \Rightarrow \frac{2^{2x}}{u^2} \cdot 4 - 4 \frac{2^x}{u} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 4u^2 - 4u - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (u + \frac{1}{2})(u - \frac{3}{2}) = 0 \quad u_1 = -\frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{3}{2}$$

$$2^x = -\frac{1}{2} \vee 2^x = \frac{3}{2}$$

(-) abgelehnt

$$2^x = \frac{3}{2}$$

$$\log_2 2^x = \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 3 - \log_2 2$$

$$x = \log_2 3 - 1$$

4) $\log_x (7x - 12) = 2 \Rightarrow x = ?$

$$\log_a b = c \Rightarrow b = a^c$$

$$7x - 12 = x^2, \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-4)(x-3) = 0 \quad x=4 \quad x=3$$

$$5) \log_2(6x^2 - 4x - 1) - \log_2(x^2 - x + 1) = \log_2 5 \Rightarrow x = ?$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{6x^2 - 4x - 1}{x^2 - x + 1} = \log_2 5$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 4x - 1 = 5x^2 - 5x + 5$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = +2 //$$

$$6) \log(x \cdot y) \cdot \log \frac{x}{y} = 3(\log y)^2 \Rightarrow \log_y x = ?$$

$$\Rightarrow (\log x + \log y)(\log x - \log y) = (3 \log y)^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - (\log y)^2 = (3 \log y)^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = [3(\log y)]^2 + (\log y)^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = [4(\log y)]^2$$

$$\Rightarrow \log x = 2 \log y$$

$$\log_{10} x = \frac{\log_y x}{\log_y 10}$$

$$\Rightarrow \frac{\log_y x}{\log_y 10} = \frac{2 \log_y y}{\log_y 10}$$

$$\Rightarrow \log_y x = 1 \cdot 2 = 2 //$$

$$7) 3 \log_3 7 + 2 \log_2 5 = 5 \log_5 x \Rightarrow x = ?$$

$$7 + 5 = x \Rightarrow x = 12$$

$$8) y = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} \text{ grafiğini çiziniz?}$$

$$9) \log_{1/3}(\log_3(x-2)) = 0 \Rightarrow x = ?$$

$$\log_3(x-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$\log_3(x-2) = 1$$

$$x-2 = 3^1, x-2 = 3, x = 5 //$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

- $y = a^x$ fonksiyonunun türevi -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a^x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\log_a y)}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = \frac{y}{\frac{1}{\ln a}} = y \ln a$$

$$x = \log_a y$$

$$\log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}$$

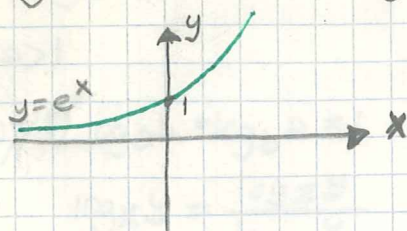
$$y' = a^x \cdot \ln a$$

$$\ln x = \log_e x$$

$y = e^x$ fonksiyonu -

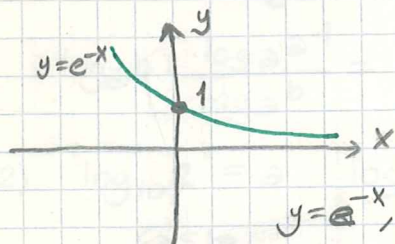
$$y = a^x, a = e$$

$$y = e^x$$



$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \ln e = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$



$$y = e^{-x}$$

$$\frac{d(e^{-x})}{dx} =$$

$$y = e^{-x}, u = -x$$

$$y = u^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = e^u = e^{-x} \quad \frac{du}{dx} = -1$$

$$y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$$

Örnek // 1/ $y = 4^{-3x}$, $y' = ?$

2/ $y = 5^{\log x}$, $y' = ?$

3/ $y = \log(\cos x)$, $y' = ?$

1- $y = 4^{-3x}$, $a = 4$, $u = -3x$

$$y = 4^u \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 4^u \cdot \ln 4 = 4^{-3x} \cdot \ln 4 \quad \frac{du}{dx} = -3$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -3 \cdot 4^{-3x} \cdot \ln 4$$

2- $y = 5^{\log x}$, $u = \log x$, $y = 5^u$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \frac{dy}{du} = 5^u \cdot \ln 5 \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \log_e$$

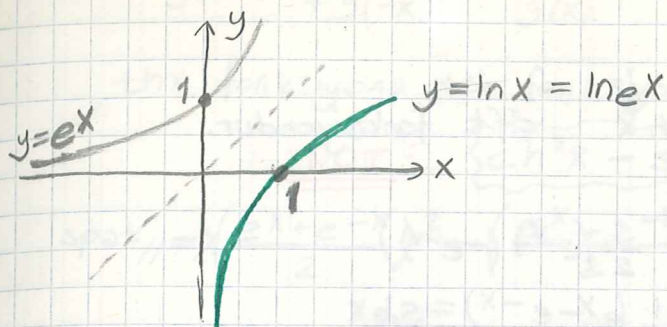
$$y' = \frac{5^{\log x}}{x} \cdot \log_e \ln 5$$

3- $y = \log(\cos x)$, $u = \cos x$, $y = \log u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \log_{10} e = \frac{1}{\cos x} \log_e$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x} \cdot \sin x \log e = -\tan x \log e //$$



- $y = x^m$ fonksiyonu -

$$y' = m x^{m-1} \quad x > 0, m \in \mathbb{R}$$

$$x = a^{\log_a x}$$

$$\bullet y = x^m = (a^{\log_a x})^m = a^{m \log_a x}$$

$$y = x^m = a^{m \log_a x}$$

$$z = m \log_a x \text{ diyelim. } y = x^m = a^z$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dz} = a^z \cdot \ln a = a^{m \log_a x} \cdot \ln a \quad \frac{dz}{dx} = m \cdot \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{m}{x} \cdot \log_a e$$

$$y' = a^{m \log_a x} \ln a \cdot \frac{m}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{m}{x} \cdot a^{m \log_a x} x^m = \frac{m}{x} \cdot x^m = m x^{m-1} \Rightarrow \underline{y' = m x^{m-1}}$$

$$\star \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x \star$$

- Hiperbolik Fonksiyonlar -

$$e^x, e^{-x}$$

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = f(x) = \text{ch } x$$

↓ hiperbolik cos. x

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{coth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

- $y = \cosh x$ fonksiyonu -

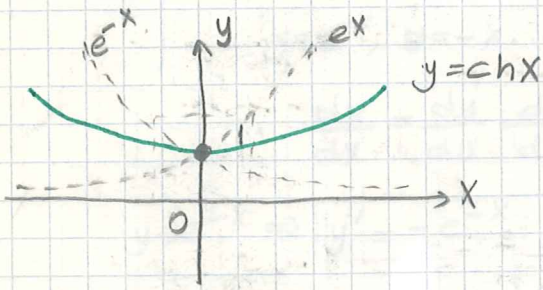
Bu fonksiyon x 'in her değeri için tanımlı, sürekli ve daima pozitif olan bir fonksiyondur.

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \quad \text{çift fonksiyondur.}$$

$$\begin{aligned} \text{türevi : } \frac{d(\cosh x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^x + (-e^{-x})) \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x \end{aligned}$$

$$\text{grafigi : } f(x) = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$



- $y = \sinh x$ fonksiyonu -

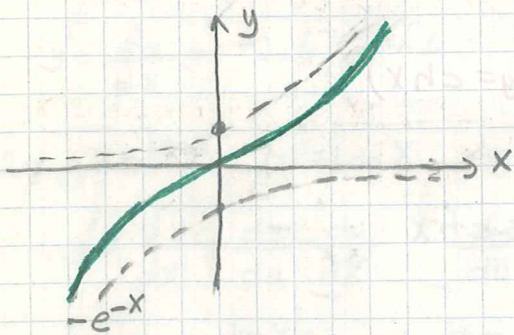
$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Bu fonksiyon x 'in her değeri için tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur. $f(-x) = \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$

(Başlangıç noktasına göre simetriktir.) $= -f(x) = -\sinh x$ tek fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \text{türevi : } \frac{d \sinh x}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \end{aligned}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$\text{grafigi : } f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2}$$



- $y = \tanh x$ fonksiyonu -

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = f(x)$$

$\cosh x$ hiçbir zaman eksenini kesmez daima pozitiftir. Payda pozitif olduğu

için $\tanh x$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ 'de tanımlı ve sürekli dir.



$$f(x) = -f(-x) \quad g(x) = g(-x)$$

$$\frac{\text{tek}}{\text{çift}} = \text{tek}$$

$$-\frac{f}{g}(-x) = \frac{-f(-x)}{+g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x)$$

thx fonksiyonu tek fonksiyondur.

NOT: $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$

ispat // $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4}$
 $= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 //$

türevi : $\frac{d(\text{th}x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$

thx fonksiyonu artan fonksiyondur.

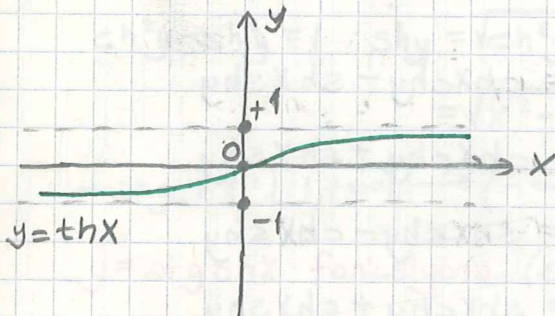
$\boxed{(\text{th}x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}}$

grafigi :

$$\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

$x \rightarrow +\infty \quad y \rightarrow 1 \quad y=1$ yatay asimptot

$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow 1 - \frac{2}{0} = -1 \quad y=-1$ yatay asimptot.



- $y = \coth x$ fonksiyonu -

$$y = f(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$\{ \text{tüm } x \neq 0 \text{ da} \}$
 $x=0$ hariç her noktada tanımlıdır.

türevi : $\frac{d(\coth x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cosh x}{\sinh x} \right) = \frac{\sinh x \cdot \cosh x - \cosh x \cdot \sinh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x}$

$$= \frac{-(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} < 0$$

$\boxed{(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}}$

$\coth x$ daima azalan bir fonksiyondur.

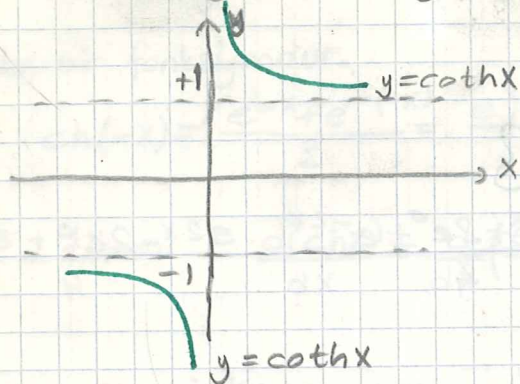
grafigi : $x=0$ da dikey asimptot vardır.

$$f(x) = y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \coth x = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}$$

$x \rightarrow -\infty \quad 0 \quad y \rightarrow +1$

$x \rightarrow -\infty$ $y \rightarrow -1$ $y = -1$ yatay asimptottur.

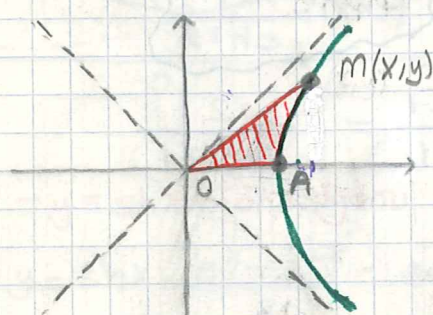
$x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 1$ $y = 1$ yatay asimptottur.



$$x = \text{cht} \quad y = \text{sht}$$

$$x^2 - y^2 = \text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$$

($x^2 - y^2$ ikizkenar bir hiperboldür.)



t 'nin değeri,

OAM nin alanının iki katına eşittir.

Teorem: $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1- $e^x = \text{ch} x + \text{sh} x$

7- $\text{ch}(x-y) = \text{ch} x \text{ch} y - \text{sh} x \text{sh} y$

2- $e^{-x} = \text{ch} x - \text{sh} x$

$\text{ch}(x+y) = \text{ch} x \text{ch} y + \text{sh} x \text{sh} y$

3- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

8- $\text{sh}(x-y) = \text{sh} x \text{ch} y - \text{ch} x \text{sh} y$

4- $\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = \text{ch} 2x$

$\text{sh}(x+y) = \text{sh} x \text{ch} y + \text{ch} x \text{sh} y$

5- $\text{ch}(-x) = \text{ch} x$

9- $\text{sh} 2x = 2 \text{sh} x \text{ch} x$

6- $\text{sh}(-x) = -\text{sh} x$

10- $\text{ch} 2x = 1 + 2 \text{sh}^2 x = 2 \text{ch}^2 x - 1$

11- $(\text{ch} x + \text{sh} x)^n = \text{ch} n x + \text{sh} n x$

İspat ① $\text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $= \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$ $= \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$

$\text{ch} x + \text{sh} x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2} = e^x //$

② $\text{ch} x - \text{sh} x = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = e^{-x} //$

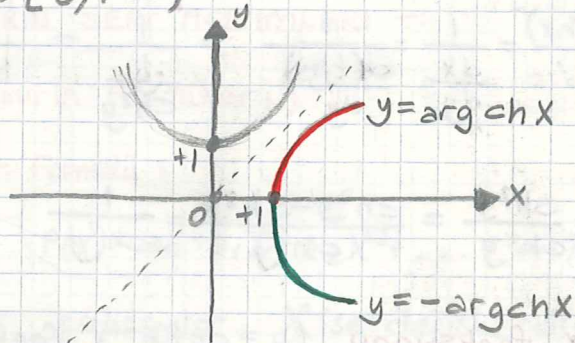
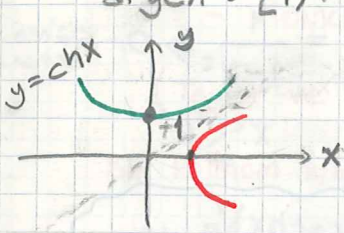
$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad \text{ch}^2 X + \text{sh}^2 X &= \left(\frac{e^X + e^{-X}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^X - e^{-X}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{e^{2X} + 2e^0 + e^{-2X} + e^{2X} - 2e^0 + e^{-2X}}{4} \\
 &= \frac{2e^{2X} + 2e^{-2X}}{4} = \frac{e^{2X} + e^{-2X}}{2} = \text{ch } 2X //
 \end{aligned}$$

- Ters Hiperbolik Fonksiyonlar -

$y = \text{argch } X$ fonksiyonu ($\text{ch}^{-1} X$ fonksiyonu)

Tanım: $y = \text{argch } X \Leftrightarrow X = \text{ch } y$

$\text{argch} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



türevi: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{Argch } X)}{dX} = \frac{1}{\frac{dX}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\text{ch } y)}{dy}} = \frac{1}{\text{sh } y}$

$$\begin{aligned}
 \text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y &= 1 \quad \text{sh } y = \sqrt{\text{ch}^2 y - 1} \\
 &= \sqrt{x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

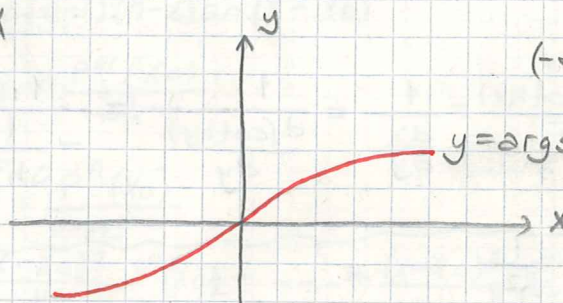
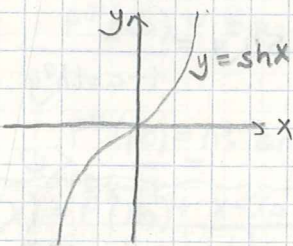
$$(\text{Argch } X)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$-\text{argch } X : [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$

$y = \text{argsh } X$ fonksiyonu ($\text{sh}^{-1} X$ fonksiyonu)

Tanım: $y = \text{argsh } X \Leftrightarrow X = \text{sh } y$

$\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \text{argsh } X$



$(-\infty, +\infty)$ da tanımlıdır.

sürekli bir fonksiyondur

türevi: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{argsh } X)}{dX} = \frac{1}{\frac{dX}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\text{sh } y)}{dy}} = \frac{1}{\text{ch } y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$$\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$$

$$\text{ch}^2 y = 1 + \text{sh}^2 y$$

$$\begin{aligned} \text{ch } y &= \sqrt{1 + \text{sh}^2 y} \\ &= \sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

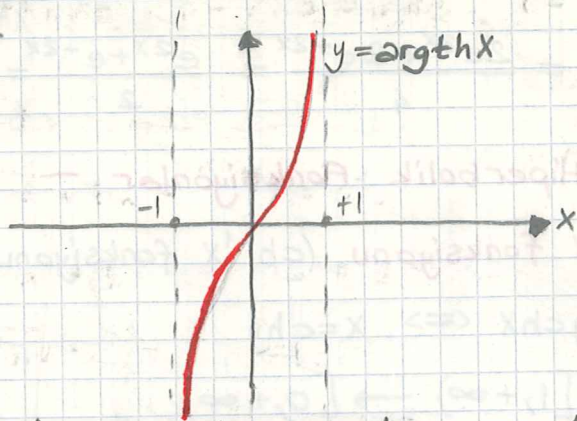
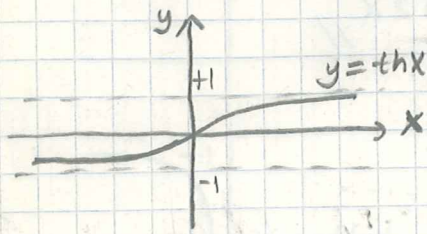
$$(\text{Argsh } X)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

fonksiyon artan olduğundan türev (+) olmalıdır. Ve kökün (+) olduğunu aldık.

$y = \operatorname{argth} x$ fonksiyonu ($\operatorname{th}^{-1} x$ fonksiyonu)

Tanım: $y = \operatorname{argth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{th} y$

$\operatorname{argth} : (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$



türevi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{argth} x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\operatorname{th} y)}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} > 0 \quad \text{daima artan.}$$

$x^2 < 1$

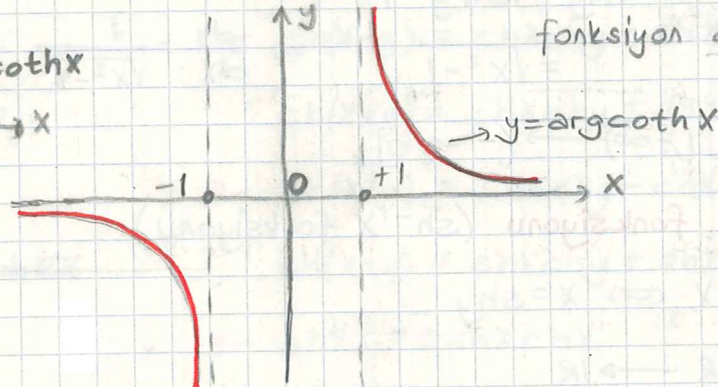
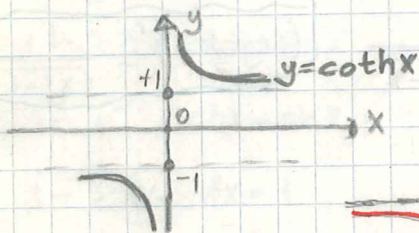
$$1 - \operatorname{th}^2 y = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}$$

$$(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$y = \operatorname{argcoth} x$ fonksiyonu ($y = \operatorname{coth}^{-1} x$ fonksiyonu)

Tanım: $y = \operatorname{argcoth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{coth} y$

$\operatorname{argcoth} : \mathbb{R} - [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$



fonksiyon azalandır.

türevi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{argcoth} x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\operatorname{coth} y)}{dy}} = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}} = -\operatorname{sh}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{coth}^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 - x^2} < 0$$

$$\frac{d(\operatorname{coth} y)}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}$$

$$\frac{1}{1 - \operatorname{coth}^2 y} = \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{\operatorname{sh}^2 y}{-(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)} = -\operatorname{sh}^2 y$$

$$x^2 = \operatorname{coth}^2 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$(\operatorname{Argcoth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

1- $y = \operatorname{argch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y$

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1, \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1, \operatorname{sh} y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{pmatrix} e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \\ e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \end{pmatrix} \Rightarrow e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$e^y = e^{\operatorname{argch} x} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y \ln e = \operatorname{argch} x \ln e = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$y = \operatorname{argch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$y' = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

- FONKSİYONLARIN SERİ AÇILIMLARI -

(Taylor ve Mac Laurin Formülleri)

Bir Polinom için Taylor Formülü :

Bir X değişkeninin, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ polinomunu alalım. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ler katsayılar, X ise değişkendir.

$X = x - x_0$ diyelim.

• $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$

$$P(x_0) = a_0$$

• $P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + n a_n(x - x_0)^{n-1}$

$$P'(x_0) = a_1$$

• $P''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)(x - x_0)^{n-2} a_n$

$$P''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{P''(x_0)}{2}$$

• $P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$

$$P'''(x_0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{P'''(x_0)}{3!}$$

$$P^n(x_0) = n! a_n \Rightarrow a_n = \frac{P^n(x_0)}{n!}$$

• $P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} P''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} P^n(x_0) + \dots \quad (3)$

Bu formüle Taylor Formülü denir.

• $x_0 = 0$ alırsak, $P(x) = P(0) + \frac{x}{1!} P'(0) + \frac{x^2}{2!} P''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} P^n(0) + \dots \quad (4)$

Bu formüle Mac Laurin formülü denir.

Örnek // $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ polinomunu $(x-2)$ nin artan kuvvetlerine göre yazınız ?

$$1 + 3x + 2x^2 + x^3 \quad P(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3$$

$$a_n = \frac{P^{(n)}(x_n)}{n!} \quad a_0 = P(2)$$

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = \underline{23 = a_0}$$

$$a_1 = \frac{P'(2)}{1!} \quad P'(x) = 3x^2 + 4x + 3$$

$$P'(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = \underline{23 = a_1}$$

$$a_2 = \frac{P''(2)}{2!} \quad P''(x) = 6x + 4$$

$$P''(2) = 6 \cdot 2 + 4 = 16$$

$$a_2 = \frac{16}{2!} = 8 \quad \underline{a_2 = 8}$$

$$a_3 = \frac{P'''(2)}{3!}$$

$$P'''(x) = 6 = P'''(2)$$

$$a_3 = \frac{6}{3!} = 1 \quad \underline{a_3 = 1}$$

$$P(x) = 23 + 23(x-2) + 8(x-2)^2 + 1 \cdot (x-2)^3$$

$$P(x) = P(2) + \frac{x-2}{1!} P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} P''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!} P'''(2)$$

Herhangi Bir Fonksiyon için Taylor Formülü

Teorem : (a,b) aralığının içinde ve uçlarında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon f olsun. Bu fonksiyonun aralığın uçlarında $x=a$ ve $x=b$ için sıfır değerini aldığını ve n . mertebeye kadar ardışık türevlere sahip olduğunu ve $(n-1)$ 'inci mertebeye kadar den türevlerin $x=a$ için sıfır olduklarını kabul edelim. Bu koşullar altında f fonksiyonunun n . mertebeden türevi x in a ile b arasında bulunan en az bir değeri için sıfıra eşittir.

İspat // Rolle teoremini kullanacağız.

$$a < c_1 < b \quad f'(c) = 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & c_3 & & & & & \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & \\ a & c_2 & & c_1 & & b \end{array}$$

$$f'(a) = 0 \quad f'(c_1) = 0, \quad f''(c_2) = 0, \quad f'''(c_3) = 0, \dots$$

$$\dots, f^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0, \quad f^{(n)}(c_n) = 0$$

$$\underline{a < c_n < b}$$

f nin tanım bölgesinde (x, ξ) tanım aralığı alalım $x_0 \leq x \leq \xi$ ve fonksiyon bu aralık içinde ilk n mertebeden türevelerine sahip olsun.

$$f(\xi) = f(x_0) + \frac{\xi - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(\xi - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(\xi - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(\xi - x_0)^n}{n!} \cdot A \quad (1)$$

olacak şekilde bir A sabiti arayalım.

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) - \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot A \quad (2)$$

şeklinde bir $\psi(x)$ yardımcı fonksiyonu alalım.

$$\psi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - \dots = 0 \quad \psi(x_0) = 0$$

$$\psi(\xi) = f(\xi) - f(x_0) - \frac{\xi - x_0}{1!} f'(x_0) - \frac{(\xi - x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{(\xi - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) - \frac{(\xi - x_0)^n}{n!} \cdot A$$

Tüm terimleri eşitliğin soluna alırsak eşitlik sıfıra eşit olur ve bu da

$\psi(\xi)$ ye eşit olur. Sonuç, $\psi(\xi) = 0$ dir.

$$\psi'(x) = f'(x) - f'(x_0) - (x - x_0) f''(x_0) - \dots$$

$$\psi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) - (x_0 - x_0) f''(x_0) - \dots$$

$$\psi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - (x - x_0) A$$

$$\psi^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0) - (x_0 - x_0) A = 0$$

$$\psi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - 0$$

$$x_0 \leq x_1 \leq \xi \quad \psi^{(n)}(x_1) = f^{(n)}(x_1) - A = 0 \text{ olur.}$$

$$A = f^{(n)}(x_1) \text{ dir.}$$

$$x_1 = x_0 + \theta(\xi - x_0) \quad x_1 = x_0 + \theta(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

Özel olarak, $x_0 = 0$ alırsak,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta \cdot x)$$

herhangi bir fonksiyon için Mac Laurin formülüdür.

- Taylor Serisi -

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

toplamında bu fonksiyonun Taylor Serisi denir.

$$f(x) = S_n + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

herhangi bir fonksiyon için
Taylor Formülü

Tamamlayıcı
terim.
 A
 $f^{(n)}(x_1)$

$$\left| f(x) - S_n(x) \right| = \left| \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n[x_0 + \theta(x-x_0)] \right| \rightarrow 0$$

$$\lim S_n(x) = f(x)$$

Herhangi bir fonksiyonun Taylor serisine açılması için gerek ve yeter koşul, tanımlayıcı terimin sıfıra yaklaşmasıdır.

Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevleri (x_0, x) gibi bir aralıkta, mutlak değerce yukarıdan sınırlı iseler, bu fonksiyon Taylor serisi yardımıyla seriye açılabilir.

İspat, $|f^n[x_0 + \theta(x-x_0)]| < M \quad \forall n \text{ için.}$

$$\left| \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n[x_0 + \theta(x-x_0)] \right| \leq \left| \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right| M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Özel olarak $x_0 = 0$ alınırsa bu seriye Mac Laurin serisi denir.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

Uygulama:

Örnek 1: $f(x) = \cos x$ fonksiyonunu Mac Laurin serisine açınız.

Tüm türevler 1 ile sınırlı olduğu ve teoremi sağladığı için, fonksiyon yakınsak bir Mac Laurin serisine açılabilir.

$$f(x) = \cos x \quad \cos 0 = 1 \quad f'(x) = -\sin x \quad f'(0) = 0, \quad f''(x) = -\cos x \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \quad f'''(0) = 0, \quad f^{IV}(x) = \cos x \quad f^{IV}(0) = 1$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x f'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n f^n(0)}{n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Ödev: $f(x) = \sin x$?

Örnek 2: $f(x) = e^x$ Mac Laurin serisine açınız.

$x > 0$ ve $(-\alpha, +\alpha)$ alalım. $-\alpha \leq x \leq +\alpha$

$$f(x) = e^x \quad e^x \leq e^{\alpha} \quad \text{Mac Laurin serisine açılabilir.}$$

$$f(0) = 1 = e^0 \quad \forall n \text{ için} \quad f^n(x) = e^x$$

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$0^0, \infty^0, 1^\infty$ (Belirsizlikleri) Belirsiz Sekilleri

$u = u(x), v = v(x)$ fonksiyonları ve $y = u^v$ fonksiyonu verilsin.

1- $v=0$ ve $u=0$ ise $0^0 = u^v$

2- $v=0$ ve $u=\infty$ ise $\infty^0 = u^v$

3- $v=\infty$ ve $u=1$ ise $1^\infty = u^v$

Görünüşte farklı iselerde, bulunurken tek yol izlenilir.

$$y = u^v \Rightarrow \ln y = \ln u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} y \right) = \lim_{x \rightarrow a} (v \ln u) \text{ sekline geldiğinde bu "üç hâlin"}$$

Sonucu olarak $0 \cdot \infty$ belirsizliği ortaya çıkar.

$$\lim_{x \rightarrow a} (v \ln u) = l \text{ gibi bir sabit çıkarsa } l = \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} y \right) \text{ dir.}$$

$$x = e^y \Rightarrow y = \ln x \quad \lim_{x \rightarrow a} y = e^l$$

Soru $y = x^{\sin x}$ in $x=0$ için limitini bulunuz?

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^{\sin x}) = ? \quad \ln y = \sin x \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x$$

$$\sin x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow - \lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} y \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1 //$$

- Diferansiyel Hesabının Uygulamaları -

Tegetaltı ve Normalaltı Uzunlukları

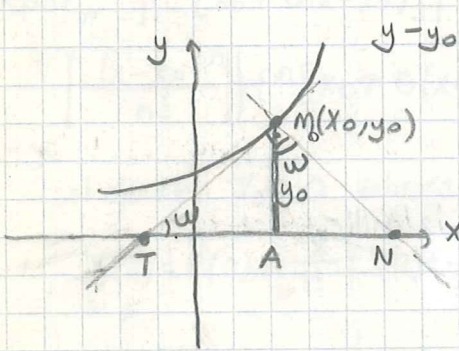
$y=f(x)$ eğrisi verilmiş olsun. Bir $M_0(x_0, y_0)$ noktasındaki teget denklemi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ idi.}$$

$$y_0' = f'(x_0) \quad y - y_0 = y_0'(x - x_0) \text{ Teget denklemi}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 \cdot f'(x_0) = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{y_0'}$$



$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0) \text{ Normal denklemi.}$$

$|TA|$: Tegetaltı

$|NA|$: Normalaltı

} ikisini hesaplayacak olursak,

$\triangle M_0 N$

$$\tan w = \frac{M_0 A}{TA} = \frac{y_0}{TA} \quad |TA| = \frac{y_0}{\tan w} = \frac{y_0}{y_0'}$$

$$|TA| = \left| \frac{y_0}{y_0'} \right| \rightarrow \text{mutlak değeridir.}$$

$$\tan w = \frac{AN}{y_0} \quad AN = y_0 \tan w = y_0 \cdot y_0'$$

$$|AN| = |y_0 \cdot y_0'| \rightarrow \text{mutlak değeridir.}$$

Örnek, $y = a \cdot \text{ch} \frac{x}{a}$ eğrisi üzerinde apsisi $x = x_0$ olan noktaya ait tegetaltı ve normalaltı uzunluklarını hesap ediniz?

$$TA = \frac{y_0}{y_0'} \quad y_0' = f'(x_0) \quad f'(x) = a \left(\text{sh} \frac{x}{a} \right) \frac{1}{a} = \text{sh} \frac{x}{a}$$

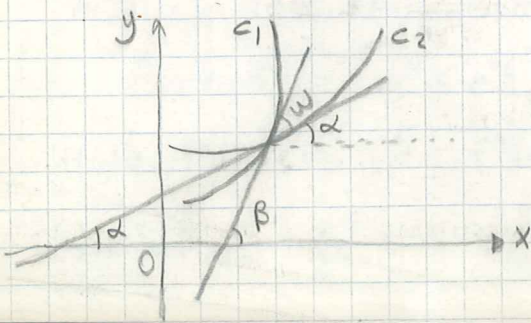
$$y_0' = f'(x_0) = \text{sh} \left(\frac{x_0}{a} \right)$$

$$y_0 = f(x_0) = a \cdot \text{ch} \left(\frac{x_0}{a} \right)$$

$$TA = \frac{a \cdot \text{ch} \left(\frac{x_0}{a} \right)}{\text{sh} \left(\frac{x_0}{a} \right)} = a \cdot \text{coth} \left(\frac{x_0}{a} \right) \text{ tegetaltı}$$

$$\text{Normalaltı, } y \cdot y_0' = a \cdot \text{ch} \left(\frac{x_0}{a} \right) \text{sh} \left(\frac{x_0}{a} \right)$$

Kesilen İki Eğrinin Kesişme Noktasında Meydana Getirdikleri Açı



w : iki eğrinin kesişme noktasında meydana getirdikleri açı (tegetleri arasındaki)

$$w = \beta - \alpha$$

$$c_1 \dots y = f(x) \quad c_2 \dots y = g(x)$$

$$\tan \beta = g'(x) \quad \tan \alpha = f'(x)$$

$$\tan w = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{g'(x) - f'(x)}{1 + f'(x) \cdot g'(x)}$$

Örnek, $y = x^2$ ve $y = 2x^3$ eğrilerinin kesişme noktalarında birbiri ile teğet ettikleri açıyı bulunuz.

$$y = x^2 \quad y = 2x^3$$

$$x^2 = 2x^3 \Rightarrow 2x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x - 1) = 0 \quad x_{1,2} = 0 \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

$$m_1 = (0,0) \quad m_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$y' = 2x, \quad f'(0) = 0$$

$$g'(x) = 6x^2 \quad g'(0) = 0$$

$$\tan w = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

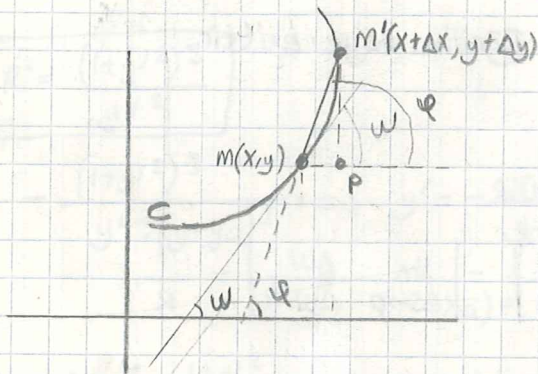
$$w = 0 \quad (\text{aralarındaki açı } 0 \text{ dir})$$

İki eğri çakışiktır.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad g'\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\tan w = \frac{\frac{3}{2} - 1}{1 + \frac{3}{2} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Düzlemsel Bir Eğrinin Teğetinin Doğrultman Kosinüsleri ve Yay Uzunluğu



φ açısının sinüs ve kosinüsüne mm' kirisinin doğrultman kosinüsleri denir.
(kirisin x eksenine yaptığı açıdır.)

$$\cos \varphi = \frac{\Delta x}{mm'} \quad \sin \varphi = \frac{\Delta y}{mm'} \quad (mm' \text{ kirisinin doğrultman kosinüsleri})$$

$$\cos w = \lim \frac{\Delta x}{mm'} \quad \sin w = \lim \frac{\Delta y}{mm'} \quad (M \text{ noktasındaki teğetin doğrultman kosinüsleri})$$

$$\Delta s : \widehat{mm'} \text{ uzunluğu} \quad \lim \frac{\Delta s}{mm'} = 1 \quad (m', m'' \text{ ye yaklaştığında limit } 1 \text{ e yaklaşıyor})$$

$$\cos w = \lim \frac{\Delta x}{mm'} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{mm'} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \lim \frac{\Delta s}{mm'} = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin w = \lim \frac{\Delta y}{mm'} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{mm'} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \lim \frac{\Delta s}{mm'} = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos w = \frac{dx}{ds} \quad \sin w = \frac{dy}{ds} \Rightarrow \text{teğetin doğrultman kosinüsleri.}$$

$$\cos^2 w + \sin^2 w = 1$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1 \quad dx^2 + dy^2 = ds^2$$

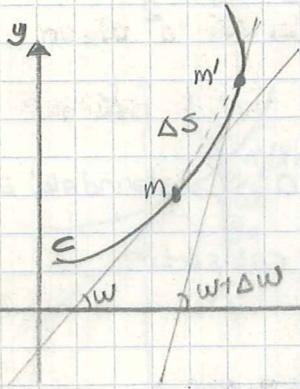
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} : \text{yay uzunluğu formülü (c eğrisinin)}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + y'^2} dx = ds$$

yay uzunluğu formülü.

- Eğrilik ve Eğrilik Dairesi -



Tanım: $\left| \frac{\Delta w}{\Delta s} \right| = \widehat{mm'}$ yayının ortalama eğriligidir.

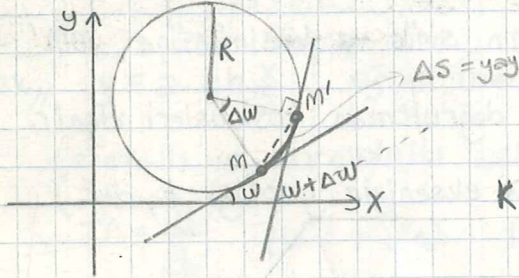
(Açının artması)
(yayın artması)

Tanım: $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta s} \right| = \left| \frac{dw}{ds} \right| = k$

k sayısına c eğrisinin m noktasındaki eğriligi denir.

Örnek 1,, c eğrisi bir doğru olsun. $k=0$ dir. (Eğrilik sıfırdır.)

Örnek 2,, c eğrisi R yarıçaplı bir daire olsun. Eğrilik neye eşittir.



$$\Delta s = \Delta w \cdot R$$

$$k = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta s} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta w \cdot R} \right| = \frac{1}{R}$$

$$y=f(x) \quad ds = \sqrt{1+y'^2} dx \quad y' = \tan w \Rightarrow w = \arctan y'$$

$$\left| \frac{dw}{ds} \right| = ? \quad \frac{dw}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \quad dw = \frac{y''}{1+y'^2} dx$$

$$\left| \frac{dw}{ds} \right| = \left| \frac{\frac{y''}{1+y'^2} dx}{\sqrt{1+y'^2} dx} \right| = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|$$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Eğrilik Formülü.

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Eğrilik Yarıçapı formülü

Örnek, $y = \frac{x^2}{2}$ eğrisi üzerinde $x=1$ noktasına ait eğrilik ve eğrilik yarıçapını bulunuz?

$$y' = \frac{1}{2} 2x = y' = f'(x) = x \quad y'' = 1 \Rightarrow f''(1) = 1$$

$$y'(1) = f'(1) = 1$$

$$k = \frac{1}{(1+1)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad k = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad R = \frac{1}{k} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

- Eğrilik Dairesinin Denklemi -

Teorem: Bir c eğrisinin m gibi bir noktasındaki eğrilik dairesi δ olsun.

y' ve y'' nün, m noktasına ait değerleri c eğrisi ve δ dairesi üzerinde aynıdır.

$$(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 = R^2$$

$$2(x-x_0) + 2(y-y_0)y' = 0$$

$$y' = \frac{-(x-x_0)}{y-y_0}$$

$$y'' = \frac{-(y-y_0) - y'(x-x_0)}{(y-y_0)^2}$$

$$= -\frac{y-y_0 + \frac{(x-x_0)^2}{y-y_0}}{(y-y_0)^2}$$

$$= -\frac{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2}{(y-y_0)^3} = -\frac{R^2}{(y-y_0)^3} //$$

$$R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

$$y'' = -\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2(y-y_0)^3} \Rightarrow y' = -\frac{x-x_0}{y-y_0}$$

$$(x-x_0) = -y'(y-y_0)$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$(y-y_0) = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

$$(x-x_0) = +\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y-y_0}$$

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$y_0 = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}$$

- Sorular -

1- $2y = 2x^3 - x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktadaki teğetleri $y = 10x - 5$ doğrusuna paraleldir?

$$y' = 10$$

$$2y' = 6x^2 - 2x$$

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$y' = 3x^2 - x = 10$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$\left(2, \frac{13}{2}\right), \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$$

2- Aşağıdaki eğrilerin herhangi bir noktasındaki teğetaltı ve normalaltı uzunluklarını bulunuz?

$$a- xy=a^2 \quad b-(x+b)^2=ay \quad c- y=a \cdot e^{x/b} \quad d- y=kx^h x$$

$$e- y=ax^4+bx^2+c \quad f- y^2=4ax$$

$$TA = \frac{y}{y'} \quad NA = y \cdot y'$$

$$c) y' = \frac{a}{b} \cdot e^{x/b} \quad TA = \frac{a \cdot e^{x/b}}{\frac{a}{b} e^{x/b}} = b \quad NA = a e^{x/b} \cdot \frac{a}{b} e^{x/b} = \frac{a^2}{b} e^{2x/b}$$

$$d) \ln y = kh \ln x \quad \frac{y'}{y} = kh \ln x + kh \quad y' = k^2 h (\ln x + 1) x^{hx}$$

$$TA = \frac{k x^{hx}}{k^2 h (\ln x + 1) x^{hx}} = \frac{1}{kh (\ln x + 1)} \quad NA = k^2 h (\ln x + 1) x^{2hx}$$

3- Aşağıdaki eğrilerin yay uzunluğu diferansiyelini bulunuz ?

$$a) x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$d) a \cosh \frac{x}{a} = y$$

$$b) x^2 + y^2 = a^2$$

$$c) b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$a- y' = \frac{a}{1} \frac{1}{a} \sinh \frac{x}{a} = \sinh \frac{x}{a} \quad y'^2 = \sinh^2 \frac{x}{a} \quad 1+y'^2 = 1 + \sinh^2 \frac{x}{a} = \cosh^2 \frac{x}{a}$$

$$ds = \cosh \frac{x}{a} dx //$$

4- a) $xy=a^2$, $x^2-y^2=b^2$ dik açı altında kesiştiklerini gösteriniz ?

b) $y=3x^2-1$, $y=2x^2+3$ eğrilerinin kesişme açısını bulunuz ?

$$a- y+xy'=0 \quad 2x-2yy'=0$$

$$y' = -\frac{y}{x} = m_1 \quad y' = \frac{x}{y} = m_2 \quad m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ diktirler.}$$

5- Aşağıdaki eğrilerin eğrilik ve eğrilik çemberlerinin denklemini bulunuz ?

$$a) y^2=4x, (1,2)$$

$$c) y=e^x (0,1)$$

$$b) b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 (0,b) \text{ ve } (a,0)$$

$$b) 2b^2 x + 2a^2 y y' = 0 \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad y'' = -\frac{b^2 \cdot a^2 y - a^2 b^2 x y'}{a^4 y^2}$$

$$y'' = \frac{a^2 b^2 y + a^2 b^2 x b^2 x}{a^4 y^2} = -\frac{a^2 b^2 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^3} = -\frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

$$(y')^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \quad x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} (0,b)$$

$$y''(0,b) = -\frac{b^4}{a^2 b^3} = -\frac{b}{a^2} \quad y'(0,b) = 0$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = b + \frac{1+0}{-\frac{b}{a^2}} = \frac{b^2-a^2}{b}$$

$$R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{(y'')^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{a^4}} = \frac{a^4}{b^2}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{b^2-a^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2} \quad (a, 0) ?$$

c) $y = e^x, y' = e^x, y'' = e^x, (0, 1)$

$$y'(0, 1) = 1 \quad y''(0, 1) = 1 \quad x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{2}{1} = 3 //$$

$$R^2 = \frac{8}{1} = 8$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$$

6- Aşağıdaki limitleri hesaplayınız?

a- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x - \sec x)$

b- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x} \right)$

c- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{Argsh} x - \ln x)$

d- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$

e- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

f- $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$

g- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{3/x}$

h- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (3+2e^{\tan x})^{\pi-2x}$

i- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$

a) $\infty - \infty$ belirsizliği $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{0}{0}$ (L'Hospital'den)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0$$

b) $\infty - \infty$ belirsizliği $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}$$

e) 1^∞ belirsizliği. $y = (\cos x + \sin x)^{1/x}$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(\cos x + \sin x) \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}}{1} \stackrel{\lim}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y$$

$$\ln y = 1 \Rightarrow y = e //$$

$$\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$$

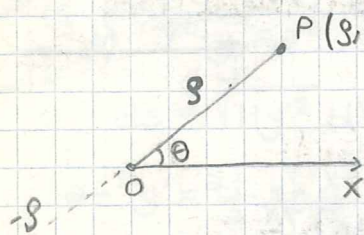
h) $y = (3+2e^{\tan x})^{2x}$ $\ln y = (1-2x) \ln(3+2e^{\tan x})$
 $\ln y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(3+2e^{\tan x})}{\frac{1}{\pi-2x}} = \frac{\infty}{\infty}$ (Bk.S:423)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{2 \sec^2 x e^{\tan x}}{3+2e^{\tan x}}}{\frac{2}{(\pi-2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\pi-2x)^2 \sec^2 x e^{\tan x}}{3+2e^{\tan x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi-2x)^2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x e^{\tan x}}{3+2e^{\tan x}} \quad (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \sec^2 x \tan x e^{\tan x} + \sec^4 x e^{\tan x}}{2 \sec^2 x e^{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \tan x + \sec^2 x}{2} = e^2$$

- Kutupsal Koordinatlar -



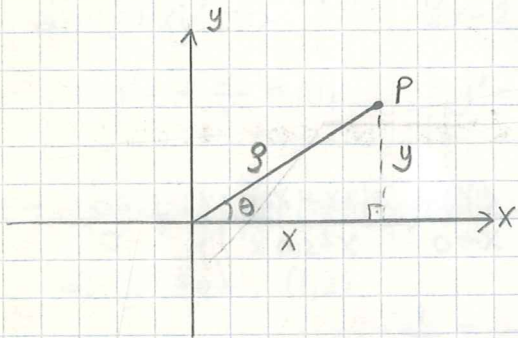
$P(\rho, \theta) \Rightarrow P$ noktasının kutupsal koordinatları.

$OP =$ ışın vektörü $= \rho$

$\theta =$ kutupsal ağı. $O:$ kutup $OX:$ kutup eksenı.

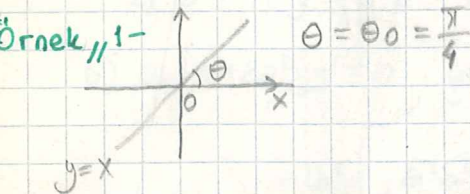
$P_0(\rho_0, \theta_0)$ ve $P(\rho, \theta)$ noktaları ne zaman eşit olur?

- $\rho = \rho_0$ ve $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Veya
- $\rho = -\rho_0$ ve $\theta = \theta_0 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

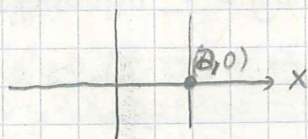


$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos \theta \quad \Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \theta$$



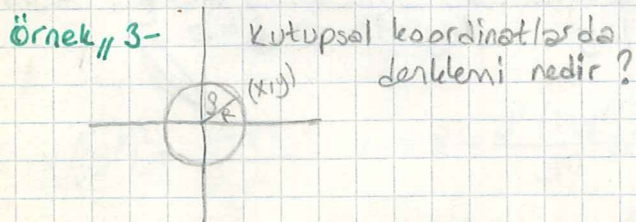
Örnek,,2- $A(a, 0)$ dengesin ve kutup eksenine dik doğru denklemini nedir?



$x = a$ (dik koordinatlar da)

$$\rho \cos \theta = a$$

$$\frac{\cos \theta}{a} = \frac{1}{\rho} //$$



$$(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = R^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R$$

Düzlemsel Eğrilerin Parametrik Gösterimi

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde, x değerinin yerine $x = g(t)$, $y = h(t)$ değişkenleri (parametreleri) yazılabilir. $x = g(t)$ veya $y = h(t)$ v.b yazılması, eğrinin parametrik denklemini (parametrelerle ifade edilmesi)ni verir.

Örnek // $x = 3t$ $y = 6t - t^2 \Rightarrow t = \frac{x}{3}$ (Parametre sayısı denklem sayısından 1 az olmalı.)

$$y = 6\left(\frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x}{3}\right)^2 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{9} + 2x \text{ parabolüdür.}$$

Burada $x = t$ $y = -\frac{t^2}{9} + 2t$ olabilir. Bu başka bir parametredir. Önemli olan x ve y yi ortadan kaldırmaktır.

Örnek // $x = 4 \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x}{4} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{16}$
 $y = 3 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{y}{3} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{y^2}{9}$ $\left. \begin{array}{l} \sin^2 t + \cos^2 t = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ elipsidir.} \end{array} \right\}$

- İNTEGRAL -

Belirsiz İntegraller

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x \quad F(x) = x^2 \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

Tanım: $f(x)$ verilmiş olsun. Türevi $f(x)$ olan bir $F(x)$ sürekli fonksiyonuna, $f(x)$

fonksiyonunun integrali (ilkel) denir. $\frac{dF}{dx} = f(x)$

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$\downarrow$ integral $\downarrow$ integrant

Örnek // $x^2 + 1 = F(x) + 1 \quad \frac{d[F(x) + 1]}{dx} = f(x) \quad \frac{d[F(x) + 1/2]}{d(x)} = f(x)$

$(F(x) + c)' = f(x) \quad c: \text{integral sabiti.}$

$$\int f(x) dx = F(x) + c \Rightarrow f(x) \text{ 'in belirsiz integrali (yapılan işleme integral alma denir.)}$$

Örnek // $\int 2x dx = x^2 + c$

$$\int 2 dx = 2x + c$$

$$\int 5 dx = 5x + c$$

Belirsiz İntegrale Ait İki Basit Özellik

1- k sabit bir reel sayı olmak üzere ;

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (\text{sabit sayı integralin dışına çıkabilir.})$$

2- İki fonksiyonun toplamının (veya farkının) integrali, bunların belirsiz integralinin toplamına (veya farkına) eşittir.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

İntegrasyon Metodları : (Basit ve Temel Formüller)

$$\textcircled{1} - \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$$

$$\textcircled{6} - \int e^x dx = e^x + c$$

$$\textcircled{2} - \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a \neq 1)$$

$$\textcircled{7} - \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\textcircled{3} - \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\textcircled{8} - \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$$

$$\textcircled{4} - \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$\textcircled{9} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\textcircled{5} - \int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\textcircled{10} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

Örnek 1 // $\int 2x^3 dx = ?$

$$= 2 \int x^3 dx = 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = 2 \frac{x^4}{4} + c = \frac{1}{2} x^4 + c$$

Örnek 2 // $\int \sqrt[3]{x^2} dx = ?$

$$= \int x^{2/3} dx = \frac{x^{2/3+1}}{(2/3)+1} + c = \frac{3}{5} x^{5/3} + c$$

Örnek 3 // $\int \frac{dx}{x^{2/5}} = ?$

$$= \int x^{-2/5} dx = \frac{x^{-2/5+1}}{-2/5+1} + c = \frac{5}{3} x^{3/5} + c$$

Değişken Değiştirme Metodu

$$\int f(x) dx, \quad x = w(t) \Rightarrow f(x) = f(w(t)) = \eta(t)$$

$$\int f(x) dx = \int \eta(t) \frac{dx}{dt} = w'(t) \quad dx = w'(t) dt$$

$$\int f(x) dx = \int \eta(t) w'(t) dt$$

Örnek // $\int \frac{dx}{2x+1} = ?$ $u = 2x+1$
 $du = 2 dx$
 $dx = \frac{du}{2}$

$$= \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c$$
$$= \frac{1}{2} \ln |2x+1| + c$$

Örnek // $\int \frac{x dx}{x^2+1} = ?$ $x^2+1 = u$
 $2x dx = du$
 $x dx = \frac{du}{2}$

$$= \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c$$
$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c$$

$$① - \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$⑥ - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arc sin } \frac{x}{a} + c$$

$$② - \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$⑦ - \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$③ - \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$⑧ - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

$$④ - \int \csc x \tan x dx = -\csc x + c$$

$$⑨ - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$⑤ - \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan } \frac{x}{a} + c$$

Örnek // $\int \frac{x dx}{\cos(x^2+1)} = ?$ $u = x^2+1$ $du = 2x dx$ $x dx = \frac{du}{2}$ (1. özellik'ten)

$$= \int \frac{\frac{du}{2}}{\cos u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \tan u \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\cos(x^2+1)} + \tan(x^2+1) \right| + c$$

Örnek // $\int \frac{x dx}{x^4+5} = ? = \int \frac{x dx}{(x^2)^2 + (\sqrt{5})^2}$ (5. özellik'ten)

$$x^2 = u \quad 2x dx = du \quad x dx = \frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{\frac{du}{2}}{u^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \text{Arctan } \frac{u}{\sqrt{5}} \right] + c = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{Arctan } \frac{x^2}{\sqrt{5}} + c$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10} \text{Arctan } \frac{x^2}{\sqrt{5}} + c$$

Örnek // $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-16}} = ? = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x)^2 - 4^2}}$

$$3x = u \quad 3 dx = du \quad dx = \frac{du}{3} \quad (9. özellik'ten)$$

$$= \int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{u^2 - 4^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4^2}} = \frac{1}{3} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 4^2} \right| + c = \frac{1}{3} \ln \left| 3x + \sqrt{(3x)^2 - 4^2} \right| + c$$

Problemler :

1- Kutupsal koordinatlarda verilen ifadeleri Kartezyen koordinatlara çevirin.

a) $\rho^2 \sin 2\theta = a^2$

b) $\rho = a \cdot \theta$

c) $\rho \theta = a$

d) $\rho = 2 \sin \theta$

e) $\rho = 2 \cos \theta$

f) $\rho = a(1 + \cos \theta)$

g) $\rho = a(1 - \cos \theta)$

h) $\rho^2 \cos 2\theta = b^2$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\left\{ \frac{y}{x} = \tan \theta \right\}$$

a- $\rho^2 \sin 2\theta = a^2$

$$2\rho^2 \sin \theta \cos \theta = a^2$$

$$2\rho \sin \theta \cdot \rho \cos \theta = a^2 \Rightarrow 2yx = a^2 //$$

$$b- \rho = a \cdot \theta \quad \theta = \frac{\rho}{a} \quad \frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \text{Arctan} \frac{y}{x}$$

$$\text{Arctan} \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \quad x^2+y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan(\text{Arctan} \frac{y}{x}) = \tan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \Rightarrow y = x \tan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

2- Kartezyen koordinatlarda verilen ifadeleri kutupsal koordinatlarda yazınız.

a) $x-3y=0$

e) $xy=a^2$

b) $x^2+y^2=16$

f) $y=2px^2$

c) $2xy=1$

g) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$

d) $x^2-y^2=a^2$

d- $(\rho \cos \theta)^2 - (\rho \sin \theta)^2 = a^2$

$$\Rightarrow \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = a^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 (\cos 2\theta) = a^2 \Rightarrow \rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta} = a^2 \cdot \sec 2\theta \Rightarrow \rho = \pm a \sqrt{\sec 2\theta}$$

g- $y^2 = \frac{x^3}{2a-x} \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \theta = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta}{2a - \rho \cos \theta}$

$$\Rightarrow 2a \rho^2 \sin^2 \theta - \rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta = \rho^3 \cos^3 \theta$$

$$\Rightarrow 2a \rho^2 \sin^2 \theta - \rho^3 \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0$$

$$\Rightarrow 2a \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^3 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{2a \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2a \sin \theta \cdot \tan \theta //$$

3- Aşağıdaki eğrilerin dik açı altında kesiptiklerini gösteriniz?

a) $\rho = 2 \cos \theta \quad \rho = 2 \sin \theta$

b) $\rho = a \theta \quad \theta \rho = a$

c) $\rho = a(1 + \cos \theta) \quad \rho = a(1 - \cos \theta)$

d) $\rho^2 \sin 2\theta = a^2 \quad \rho^2 \cos 2\theta = b^2$

a- $\rho^2 = 2\rho \cos \theta \Rightarrow x^2+y^2 = 2x \Rightarrow \overset{\text{türevi}}{2x+2yy'} = 2 \Rightarrow y' = \frac{1-x}{y} = m_1$

$\rho^2 = 2\rho \sin \theta \Rightarrow x^2+y^2 = 2y \Rightarrow 2x+2yy' = 2y' \Rightarrow yy' - y' = -x$

$$\frac{y'(y-1) = -x}{y' = \frac{x}{1-y}} = m_2$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{1-x}{y} \cdot \frac{x}{1-y} = \frac{x-x^2}{y-y^2} = \frac{\frac{x^2+y^2}{2} - x^2}{\frac{x^2+y^2}{2} - y^2}$$

$$= -1 //$$

$$d - \overset{\text{türevi}}{y^2 \sin^2 \theta = a^2} \Rightarrow 2xy = a^2 \Rightarrow 2y + 2xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} = m_1 \quad 363$$

$$y^2 \cos^2 \theta = b^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = b^2 \Rightarrow 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} = m_2 \quad m_1 \cdot m_2 = -1 //$$

4- Parametrik denklemlerle verilen eğrilerden yararlanarak x ve y arasındaki bağıntıyı bulunuz.

$$a) x=3t \quad y=6t-t^2 \quad b) x=t^2 \quad y=t^2 \quad c) x=t^2 \quad y=t$$

$$d) x=4\cos t \quad y=3\sin t \quad e) x=3e^{-t} \quad y=e^{2t}$$

$$e - x=3e^{-t}, y=e^{2t}$$

$$\frac{x}{3} = e^{-t} \Rightarrow \ln \frac{x}{3} = -t \Rightarrow -\ln \frac{x}{3} = t \Rightarrow \ln \frac{3}{x} = t \Rightarrow y = e^{2t} = e^{2 \cdot \ln \frac{3}{x}} = e^{\ln \left(\frac{3}{x}\right)^2} = \left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{9}{x^2} //$$

5- Aşağıdaki / integralleri bulunuz.

$$a - \int 2x^4 dx \quad b - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad c - \int \frac{2+3x}{x^3} dx$$

$$d - \int \left(\frac{3}{x^2} - \sqrt[3]{3x} - 4\sqrt{2x} + 5 \right) dx$$

$$e - \int (1+x)^2 \sqrt{x} dx \quad f - \int \sqrt{2+5x} dx \quad g - \int \frac{dx}{x+1} \quad h - \int \frac{e^x}{e^x+2} dx$$

$$i - \int \frac{\sin x}{\cos x+1} dx \quad j - \int \frac{\tan x}{\cos^2 x (1+\tan^2 x)} dx \quad k - \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan x}$$

$$l - \int e^{\sin x} \cos x dx \quad m - \int \tan(e^x) e^x dx \quad n - \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} dx$$

$$o - \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1} dx \quad p - \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

6- Aşağıdaki eğrilerin grafiklerini çiziniz.

$$\left. \begin{array}{l} a) \rho = a(1+\cos \theta) \\ b) \rho = a(1-\cos \theta) \\ c) \rho = a(1+\sin \theta) \\ d) \rho = a(1-\sin \theta) \end{array} \right\} \text{Kardiyoid}$$

$$\left. \begin{array}{l} e) \rho = a \cos 2\theta \\ f) \rho = a \cos 3\theta \end{array} \right\} \text{Rozar}$$

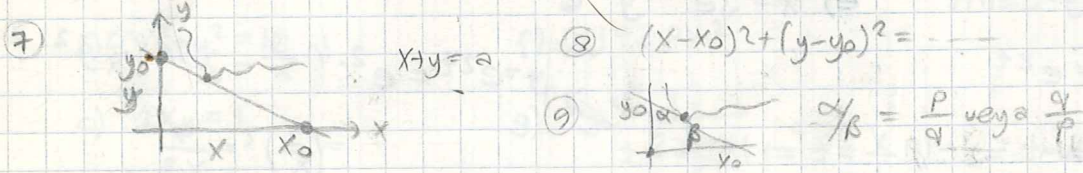
$$g) \rho^2 = a^2 \cos 2\theta \quad \text{Lenniskat}$$

$$h) \rho = a \sin 3\theta \quad \text{Üç yapraklı gül.}$$

7- $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğetin eksenleri kesim noktasının orjine olan uzaklıkları toplamının a olduğunu gösteriniz.

8- $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğetin eksenleri kesim noktasının birbirlerine olan uzaklıklarının a ya eşit olduğunu gösteriniz.

9- $y^p \cdot x^q = a^{p+q}$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğetin değme noktasının eksenleri kesim noktasına p/q veya q/p oranında böldüğünü gösteriniz.



Gözümler :

6- a) $\int 2x^4 dx = 2 \int x^4 dx = 2 \cdot \frac{x^5}{5} + c = \frac{2}{5} x^5 + c$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int (x)^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$

j) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} dx \Rightarrow \tan x = u \quad du = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$\int \frac{u du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \quad u du = \frac{du}{2}$
Veya

$1 + \tan^2 x = u \quad \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c$
 $= \frac{1}{2} \ln |1 + \tan^2 x| + c$

o) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 1} dx \quad e^{2x} = u \quad 2e^{2x} dx = du \quad e^{2x} dx = \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} e^{2x} + c$

p) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad x = \sin^2 u \Rightarrow \sqrt{x} = \sin u \quad dx = 2 \sin u \cos u du$

$\int \frac{2 \sin u \cos u du}{\sqrt{\sin^2 u \cos^2 u}} \quad u = \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \Rightarrow 2u + c$
 $\sin u \cos u \rightarrow \int 2 du \quad 2 \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} + c$

9- $x^q y^p = a^{p+q}$

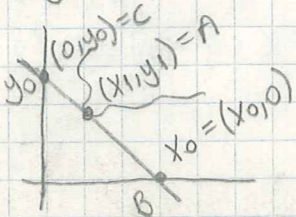
$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{p}{q}$

türevi $\Rightarrow q x^{q-1} y^p + p x^q y^{p-1} y' = 0$

$\Rightarrow p x^q y^{p-1} y' = -q x^{q-1} y^p$

$\Rightarrow y' = \frac{-q x^{q-1} y^p}{x^q y^{p-1}}$

$\Rightarrow \frac{q}{p} x^{-1} y = - \frac{q y}{p x}$



$$\Rightarrow \left[m = -\frac{q}{p} \cdot \frac{y_1}{x_1} \right] \quad y - y_1 = -\frac{q}{p} \frac{y_1}{x_1} (x - x_1)$$

$$x=0, \quad y - y_1 = -\frac{q}{p} \frac{y_1}{x_1} (-x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{q}{p} y_1 \Rightarrow y = y_1 + \frac{q}{p} y_1 \Rightarrow y = y_1 \left(1 + \frac{q}{p}\right)$$

$$y_0 = \left(0, y_1 \left(1 + \frac{q}{p}\right)\right)$$

$$y=0 \text{ için, } -y_1 = -\frac{q}{p} \frac{y_1}{x_1} (x - x_1) \Rightarrow x - x_1 = \frac{p}{q} x_1$$

$$x - x_1 = \frac{p}{q} x_1 \Rightarrow x = x_1 + \frac{p}{q} x_1$$

$$x = x_1 \left(1 + \frac{p}{q}\right) \quad x_0 = \left(x_1 \left(1 + \frac{p}{q}\right), 0\right) \quad (x_1, y_1)$$

$$y_0 = \left(0, y_1 \left(1 + \frac{q}{p}\right)\right)$$

$$\sqrt{\left(x_1 \left(1 + \frac{p}{q}\right) - x_1\right)^2 + (-y_1)^2} = \left(x_1 \left(1 + \frac{p}{q} - 1\right)\right)^2 + y_1^2 = \sqrt{\frac{p^2 x_1^2}{q^2} + y_1^2}$$

$$K \Leftarrow \frac{\sqrt{p^2 x_1^2 + q^2 y_1^2}}{q} \quad \sqrt{x_1^2 + \left(y_1 \left(1 + \frac{q}{p} - 1\right)\right)^2} = \sqrt{x_1^2 + \frac{q^2}{p^2} y_1^2}$$

$$\frac{\frac{K}{q} \frac{\sqrt{p^2 x_1^2 + q^2 y_1^2}}{p}}{\frac{\frac{K}{p}}{\frac{K}{q}}} = \frac{K}{p} \cdot \frac{q}{K} = \frac{q}{p} //$$

Belirsiz İntegralin Geometrik Anlamı Ve İntegral Sabitinin Hesaplanması

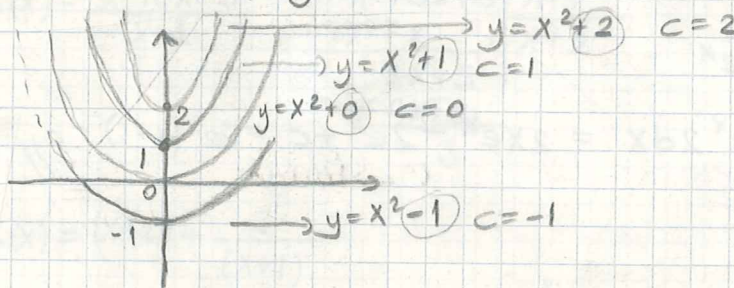
$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad y = F(x) + c \quad (x_0, y_0) : \text{Başlangıç koşulu}$$

$$y_0 = F(x_0) + c \Rightarrow c = y_0 - F(x_0)$$

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)] : [(x_0, y_0) \text{ noktasından geçen integral eğrisidir}]$$

Örnek //

$$\int 2x dx = x^2 + c \quad y = x^2 + c$$



(0,1) den geçmesi için $c = ?$

$$y = x^2 + c, \quad 1 = 0 + c, \quad c = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1 //$$

$f(x) = \frac{A}{(ax+b)^n}$ Tipinde Basit Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi

Kural I - $A, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, ($n \neq 1$ ise)

$$\int \frac{A dx}{ax+b} = \frac{A}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$u = ax+b \quad du = a \cdot dx \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$= A \int \frac{dx}{ax+b} = A \int \frac{\frac{du}{a}}{u} = \frac{A}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{A}{a} \ln|u| + c$$

Örnek // $\int \frac{4}{3x+5} dx = ? = \frac{4}{3} \ln|3x+5| + c$

Örnek // $\int \frac{2}{-6x+7} dx = ? = \frac{2}{-6} \ln|-6x+7| + c = -\frac{1}{3} \ln|-6x+7| + c$

Kural II - $\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx = \frac{A}{a(1-n)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$ (n farklı ise)

$\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx$ $u=ax+b$ $du=a dx$ $dx = \frac{du}{a}$ $u^{-(n-1)} = \frac{1}{u^{n-1}}$

$$= A \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = A \int \frac{\frac{du}{a}}{u^n} = \frac{A}{a} \int u^{-n} du = \frac{A}{a} \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{a(1-n)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$$

Örnek // $\int \frac{9}{(5x-8)^6} dx = ? = \frac{9}{5(1-6)} \cdot \frac{1}{(5x-8)^5} + C = -\frac{9}{25} \frac{1}{(5x-8)^5} + C$

Kısımlara Ayırma Yöntemiyle İntegral Alma

(Kismî İntegrasyon)

u ve v , x 'e bağlı iki fonksiyon olsun. $u(x)$, $v(x)$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\int d(u \cdot v) = \int u dv + \int v du$$

$$u \cdot v = \int u dv + \int v du \Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Örnek // 1- $\int 2xe^x dx = ?$

$$u=2x \quad dv=e^x dx$$

$$du=2dx \quad v=\int e^x dx = e^x$$

$$\int 2xe^x dx = 2x \cdot e^x - \int e^x 2dx = 2xe^x - 2e^x + c = 2e^x(x-1) + c //$$

Örnek // 2- $\int x \ln x dx = ?$

$$u=\ln x \quad dv=x dx$$

$$du=\frac{1}{x} dx \quad v=\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln x dx = (\ln x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c //$$

Örnek // 3- $\int x^2 e^x dx = ?$

$$u = x^2 \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2 \int \overbrace{x e^x}^{x e^x - e^x} dx$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \\ = e^x(x^2 - 2x + 2) + c //$$

Rasyonel Kesirlerin İntegrasyonu

Tanım: Pay ve paydası birer polinom olan yani, iki polinomun oranı olarak tanımlanan fonksiyonlara rasyonel fonksiyon (rasyonel kesir) denir.

Kabul edelim ki, $P(x)$ n 'inci dereceden, $q(x)$ m 'inci dereceden iki polinom olsunlar. Böylece $R(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ $q(x) \neq 0$ rasyonel bir kesirdir.

1- Eğer $n < m$ ise bu polinoma, has rasyonel fonksiyon veya has rasyonel kesir denir.

Örnek // $R(x) = \frac{2x+5}{x^2+4x-1}$ $P(x) = 2x+5$ $q(x) = x^2+4x-1$ (has rasyonel kesirdir.)

2- Eğer $n \geq m$ ise $\begin{array}{r} P(x) \\ \hline q(x) \end{array} \overline{) q(x)} = \frac{P(x)}{q(x)} = B(x) + \frac{k(x)}{q(x)}$

Örnek // $R(x) = \frac{x^2+3x+5}{x+1}$

$$\begin{array}{r} x^2+3x+5 \\ \overline{) x+1} \\ \underline{+x^2+x} \\ 2x+5 \\ \underline{+2x+2} \\ 3 \end{array}$$

$$R(x) = (x+2) + \frac{3}{(x+1)}$$

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx = \int (x+2) + \frac{3}{x+1} dx = \int (x+2) dx + \int \frac{3}{x+1} dx \\ = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x+1| + c$$

Kural I - $\frac{k(x)}{q(x)}$ has rasyonel kesirinin paydası olan m 'inci dereceden $q(x)$

polinom, hepsi birinci dereceden m tane farklı çarpana ayrılabilirse

$x-a$ gibi her çarpana $\frac{A}{x-a}$ biçiminde bir basit kesir karşı tutulmak

Üzere, verilen has rasyonel kesir, böyle m tane basit kesrin toplamı olarak yazılabilir.

$$\frac{k(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \dots + \frac{A_m}{(x-a_m)}$$

$$q(x) = \underbrace{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)}_{m \text{ tane}}$$

Örnek // $R(x) = \frac{8x-2}{x^2-3x-4}$ has rasyonel kesrini basit kesirlere ayıralım.

$$x^2-3x-4=0 \quad x_1=-1 \quad x_2=4$$

$$R(x) = \frac{8x-2}{x^2-3x-4} = \frac{8x-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-4} = \frac{A_1(x-4) + A_2(x+1)}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x - 4A_1 + A_2}{(x-4)(x+1)} =$$

$$1. \text{ yol // } 8x-2 = (A_1+A_2)x - 4A_1 + A_2$$

$$A_1+A_2=8$$

$$-4A_1+A_2=-2$$

$$A_1+A_2=8$$

$$-4A_1+A_2=-2$$

$$A_1=2 \quad A_2=6$$

$$2. \text{ yol // } 8x-2 = A_1(x-4) + A_2(x+1)$$

$$x=4 \Rightarrow 8 \cdot 4 - 2 = 0 + A_2(4+1) \Rightarrow 30 = 5A_2 \Rightarrow A_2=6$$

$$x=-1 \Rightarrow 8(-1) - 2 = A_1(-1-4) + 0 \Rightarrow -10 = -5A_1 \Rightarrow A_1=2$$

$$= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-4} = \frac{2}{x+1} + \frac{6}{x-4}$$

$$\int \frac{8x-2}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{6}{x-4} dx = 2 \ln|x+1| + 6 \ln|x-4| + C //$$

Bir $\frac{k(x)}{q(x)}$ has rasyonel kesrinin paydası olan m'inci dereceden q(x) polinomu, birinci dereceden m tane çarpanlara ayrılabilirse, ve bazı çarpanlar birkaç kez tekrar ederse, k kez tekrar eden her bir $(x-a)^k$ çarpanına $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{N}{(x-a)^k}$ biçiminde basit kesirlerin toplamı

karşılık tutulmak üzere, verilen has rasyonel kesir yine m tane basit kesrin toplamı olarak yazılabilir.

Örnek // $R(x) = \frac{2x+12}{x^3+4x^2+4x}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım.

369

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2 \quad x_1=0, x_2=-2$$

$$R(x) = \frac{2x+12}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2} \quad 2x+12 = A(x+2)^2 + B(x+2)x + Cx$$

$$x=0 \Rightarrow 12 = 4A \Rightarrow A=3$$

$$x=-2 \Rightarrow 8 = -2C \Rightarrow C=-4 \quad 2.yol'dan çözümsüz$$

$$1.yol'dan; \frac{(A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A}{x(x+2)^2}$$

$$A+B=0, \quad 4A+2B+C=2 \quad 4A=12 \quad \underline{A=3} \quad \underline{B=-3} \quad \underline{C=-4}$$

$$R(x) = \frac{2x+12}{x^3+4x^2+4x} = \frac{3}{x} + \frac{-3}{(x+2)} + \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{2x+12}{x^3+4x^2+4x} dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{3}{x+2} dx - \int \frac{4}{(x+2)^2} dx \rightarrow \frac{A}{a(1-\eta)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$$

$$= 3 \ln|x| - 3 \ln|x+2| - \frac{4}{1(1-2)} \cdot \frac{1}{(x+2)^{2-1}} + C$$

$$= 3 \ln|x| - 3 \ln|x+2| + \frac{4}{x+2} + C$$

$\frac{k(x)}{q(x)}$ has kesrinin paydası olan m . dereceden $q(x)$ polinomu tanıyan

birinci dereceden m tane garpana ayrılamıyorsa, bu taktirde $\frac{k(x)}{q(x)}$ has

kesri yine basit kesirlerin toplamı olarak yazılabilir. Ancak bu basit

kesirlerin bazılarının paydası (1. dereceden garpanlara ayrılamayan)

x^2+ax+b veya $(x^2+ax+b)^k$ biçiminde ifadeleri kapsar.

$$\frac{P(x)}{q(x)} = E(x) + \sum \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \right) + \sum \left(\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \dots \right)$$

$$\deg P(x) = n \quad \deg q(x) = m \quad \deg E(x) = n-m \quad \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^h}$$

$$\frac{P(x)}{q(x)} = E(x) + \frac{k(x)}{q(x)}$$

Örnek // • $f(x) = \frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2}$ basit kesirler ayrınız.

$$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{A_1(x^6+2x^4+x^2) + A_2(x^5+2x^3+x) + A_3(x^4+2x^2+1) + B_1x+C_1(x^5+x^3) + x^3(B_2x+C_2)}{x^3(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(A_1+B_1)x^6 + (A_2+C_1)x^5 + (2A_1+A_3+B_1+B_2)x^4 + (2A_2+C_1+C_2)x^3 + (A_1+2A_3)x^2 + (A_2x) + A_3}{x^3(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} A_1+B_1 &= 0 & A_1 &= -2 \\ A_2+C_1 &= 0 & C_1 &= -1 \\ 2A_1+A_3+B_1+B_2 &= 0 & B_1 &= 2 \\ 2A_2+C_1+C_2 &= 0 & B_2 &= 1 \\ A_1+2A_3 &= 0 & C_2 &= -1 \\ A_2 &= 1 \\ A_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k} dx = \frac{A_k}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} \quad k \neq +1$$

$$= -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2x-1}{x^2+1} + \frac{x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\ln|x^2+1| - \arctan x$$

$$\int \frac{x+1}{x^3(x^2+1)^2} dx = -2\ln|x| + \frac{1}{(1-2)} \frac{1}{x^{2-1}} + \frac{1}{(1-3)} \frac{1}{x^{3-1}} + \ln|x^2+1| - \arctan x + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

kısmi integrasyondan

$$u = x^2+1$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$u = x^2+1 \quad dv = dx$$

$$du = 2x dx \quad v = x$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2} \cdot \frac{1}{u^{2-1}}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{u} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{x^3(x^2+1)^2} = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln|x^2+1| - \arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Aşağıdaki integralleri yazın.

a) $\int (6-5x^3)^{10} x^2 dx$ b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ c) $\int x \sqrt{3-x^2} dx$ d) $\int x e^{-x} dx$

e) $\int x^2 e^{-x} dx$ f) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ g) $\int \frac{dx}{(x-5)^4}$ h) $\int \frac{x+9}{x^2-9} dx$

i) $\int \frac{x^3+x^2+x-5}{x+1} dx$

j) $\int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x}$

Trigonometrik Fonksiyonlar Cinsinden Bir Rasyonel Kesrin İntegrasyonu

- Yarım Açı Metodu -

$f(\cos x, \sin x)$

$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \Rightarrow x = 2 \arctan t$

• $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ • $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \tan x = t \Rightarrow \arctan t = x$

$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{1}{1+t^2}$

• $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Örnek 1 // $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt$

$= \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} \right) dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$= \arctan t - \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \arctan t - t + \int \frac{1}{t^2+1} dt$

$= 2 \arctan(\tan \frac{x}{2}) - \tan \frac{x}{2} = x - \tan \frac{x}{2} + C$

Örnek 2 // $\int \frac{dx}{2(1+\sin x) - \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{2\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{2+2t^2+4t-1+t^2}{1+t^2}}$

$= \int \frac{2 dt}{3t^2+4t+1} = 2 \int \frac{1}{(3t+1)(t+1)} dt$

$\frac{1}{3t^2+4t+1} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(3t+1)}{(3t+1)(t+1)}$

$A(t+1)+B(3t+1) = 1 \quad At+A+Bt+B=1$

$t(A+B)+(A+B)=1 \quad B=-1/2 \quad A=3/2$

$= 2 \left[\int \frac{3/2}{3t+1} dt - \int \frac{1/2}{t+1} dt \right] = 2 \left[\frac{1}{2} \int \frac{1}{3t+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt \right]$

$= \ln|3t+1| - \ln|t+1| + C \quad t = \tan \frac{x}{2}$

$= \ln|3 \tan \frac{x}{2} + 1| - \ln|\tan \frac{x}{2} + 1| + C$

$= \ln \frac{|3 \tan \frac{x}{2} + 1|}{|\tan \frac{x}{2} + 1|} + C //$

$\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden bir polinomun integrasyonu :

$p, q \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ;

$$I = \int \cos^p x \sin^q x dx \quad \text{tipindeki integraller :}$$

1- p ve q tek sayılar ise $p = 2m+1, q = 2n+1$

$$I = \int \cos^{2m+1} x \cdot \sin^{2n+1} x dx$$

$$= \int \cos^{2m} x \sin^{2n} x \sin x dx$$

$$\cos x = t \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x \quad dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$= \int t^{2m} (1-t^2)^n \sin x \cdot \left(-\frac{dt}{\sin x}\right)$$

$$\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n = (1-\cos^2 x)^n$$

$$= -\int t^{2m} (1-t^2)^n dt$$

Örnek //

$$\int \cos^3 x \sin^5 x dx = ?$$

$$= \int \cos^2 x \sin^4 x \sin x dx$$

$$t = \cos x \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x \quad dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$= \int \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x dx$$

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1-\cos^2 x)^2$$

$$= \int \cos^2 x (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx$$

$$= \int t^2 (1-t^2)^2 \left(-\frac{dt}{\sin x}\right) \sin x$$

$$= -\int t^2 (1-t^2)^2 dt$$

$$= -\int (t^3 - 2t^5 + t^7) dt = -\left(\frac{t^4}{4} - 2 \cdot \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{8}\right) + C = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8} + C$$

$$= \frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^6 x}{3} + \frac{\cos^8 x}{8} + C //$$

2- $p = 2m+1$ tek, $q = 2n$ çift ise,

$$\int \cos^p x \sin^q x dx = \int \cos^{2m+1} x \cdot \sin^{2n} x dx \quad (\text{tek olana } t \text{ dersek})$$

$$= \int \cos^{2m} x \cos x \cdot \sin^{2n} x dx \Rightarrow t = \sin x \quad \frac{dt}{dx} = \cos x \quad dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$= \int (\cos^2 x)^m \cos x (\sin^2 x)^n dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^m \cos x (\sin^2 x)^n dx$$

$$= \int (1-t^2)^m \cos x t^{2n} \frac{dt}{\cos x} = \int (1-t^2)^m t^{2n} dt$$

Örnek //

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cos x \sin^2 x dx$$

$$t = \sin x \quad \frac{dt}{dx} = \cos x \quad \frac{dt}{\cos x} = dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x) \cos x \sin^2 x dx$$

$$= \int (1-t^2) \cos x t^2 \frac{dt}{\cos x} = \int t^2 (1-t^2) dt$$

$$= \int (t^2 - t^4) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \int -$$

3- $p=2m$ $q=2n$ ise

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^p x \sin^q x dx = \int \cos^{2m} x \sin^{2n} x dx$$

$$= \int (\cos^2 x)^m (\sin^2 x)^n dx$$

$$= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^m \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^n dx$$

örnek // $\int \cos^4 x \sin^2 x dx = f(x)$

$$= \int (\cos^2 x)^2 (\sin^2 x) dx$$

$$= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)^2 (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)(1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x) \sin^2 2x dx$$

$$[1 - (1 - \sin^2 2x)] =$$

$$= \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x + \cos 2x \sin^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x dx$$

① $\int \cos 2x \sin^2 2x dx$ $u=2x$ $du=2dx$ $dx=\frac{du}{2}$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u \sin^2 u du \quad t = \sin u \quad \frac{dt}{du} = \cos u \quad du = \frac{dt}{\cos u}$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u t^2 \frac{dt}{\cos u}$$

$$= \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6} = \frac{\sin^3 u}{6} = \frac{\sin^3 2x}{6} //$$

② $\int \sin^2 2x dx$ $2x=u$ $2dx=du$ $dx=\frac{du}{2}$

$$= \frac{1}{2} \int \sin^2 u du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1 - \cos 2u}{2} \right) du = \frac{1}{4} \left[\int du - \int \cos \frac{2u}{2} du \right]$$

$$\begin{aligned} z &= 2u \\ \frac{dz}{du} &= 2 \\ du &= \frac{dz}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left[u - \frac{1}{2} \int \cos z dz \right] = \frac{1}{4} \left[u - \frac{1}{2} \sin z \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[u - \frac{1}{2} \sin 2u \right] = \frac{1}{4} \left[2x - \frac{1}{2} \sin 4x \right] = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x //$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \int f(x) = \frac{\sin^3 2x}{6} + \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C \Rightarrow \int f(x) = \frac{\sin^3 2x}{48} + \frac{x}{16} + \frac{\sin 4x}{64} + C$$

$f(\sinh x, \cosh x)$ (Hiperbolik olarak verilen fonksiyonlar için.)

$$\th \frac{x}{2} = t \text{ veya } e^x = t$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \quad (\text{p ve q çift ise})$$

— $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$ ifadelerinden yalnız birini içeren ve

Başka köklü ifade içermeyen integraller —

1- integral $\sqrt{a^2 - x^2}$ yi içeriyorsa $x = a \sin t$ değişken değiştirilmesi yapılır.

2- " $\sqrt{a^2 + x^2}$ " " $x = a \tan t$ " " " "

3- " $\sqrt{x^2 - a^2}$ " " $x = \frac{a}{\cos t}$ " " " "

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1- $\int x \sqrt{4 - x^2} dx$ $a^2 = 4$ $a = 2$ $x = 2 \sin t$ $dx = 2 \cos t dt$

$$= \int \frac{2 \sin t \sqrt{4 - (4 \sin^2 t)}}{x} \frac{2 \cos t dt}{dx} \quad \downarrow \quad \frac{x}{2} = \sin t \Rightarrow t = \text{Arcsin} \frac{x}{2}$$

$$= 8 \int \sin t \cos^2 t dt \quad u = \cos t \quad du = -\sin t dt \quad dt = -\frac{du}{\sin t}$$

$$= 8 \int (\sin t) u^2 \left(-\frac{du}{\sin t}\right) = -8 \int u^2 du$$

$$= -8 \frac{u^3}{3} + c = -8 \frac{\cos^3 t}{3} + c = -\frac{8}{3} \cos^3(\text{Arcsin} \frac{x}{2}) + c$$

— $\sqrt[n]{a+bx}$ ifadesini içeren integraller —

$a+bx = t^p$ değişken değiştirilmesi yapılır. Buradaki p ; m gibi sayıların en küçük ortak katıdır.

$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$ $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ $x^{1/2} = \sqrt{x}$ 6 en küçük ortak katıdır

$X = t^6$ dersek, $dx = 6t^5 dt$

$$= \int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}-1} 6t^5 dt = \int \frac{t^3}{t^2-1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2-1} dt$$

$$\begin{array}{r} t^8 \overline{) t^2-1} \\ \underline{t^6+t^4+t^2+1} \\ t^2-1 \end{array}$$

$$= 6 \int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt + c$$

$$= 6 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + c \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$X = t^6 \Rightarrow t = x^{1/6}$$

$$= \frac{6}{7} (x^{1/6})^7 + \frac{6}{5} (x^{1/6})^5 + \frac{6}{3} (x^{1/6})^3 + 6x^{1/6} + \frac{6}{2} \ln \left| \frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1} \right| + c$$

$$= \frac{6}{7} x^{7/6} + \frac{6}{5} x^{5/6} + 2x^{1/2} + 6x^{1/6} + 3 \ln \left| \frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1} \right| + c$$

$$\textcircled{1} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = ? \quad x = 2 \sin t \quad dx = 2 \cos t dt \quad t = \arcsin \frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t dt}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t dt}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}} = \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t dt}{2 \cos t} = 4 \int \sin^2 t dt$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

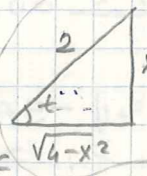
$$= 4 \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2 \int (1 - \cos 2t) dt = 2t - \sin 2t + c$$

$$= 2t - 2 \sin t \cos t + c$$

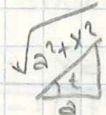
$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \frac{x}{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + c$$

$$\sin t = \frac{x}{2}$$



$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = ? \quad x = a \tan t \quad dx = a \sec^2 t dt \quad \tan t = \frac{x}{a}$$



$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \int \frac{a \sec^2 t dt}{(a^2(1+\tan^2 t))^{3/2}} = \int \frac{a \sec^2 t dt}{a^3 \sec^3 t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\sec t} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt$$

$$= \frac{1}{a^2} \sin t + c = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + c$$

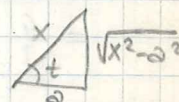
$$\textcircled{3} \int x^3 \sqrt{x^2-a^2} dx \quad x = \frac{a}{\cos t} \quad dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} = a \sec t \tan t dt$$

$$= \int a^3 \sec^3 t \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)} a \sec t \tan t dt$$

$$x = a \sec t \Rightarrow \sec t = \frac{x}{a} = \frac{1}{\cos t}$$

$$= \int a^5 \sec^4 t \tan^2 t dt$$

$$\Rightarrow \cos t = \frac{a}{x}$$



$$= a^5 \int \sec^2 t (1 + \tan^2 t) \tan^2 t dt$$

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$\tan t = u \Rightarrow du = \sec^2 t dt$$

$$= a^5 \int (1+u^2) u^2 du = a^5 \int u^2 du + a^5 \int u^4 du = a^5 \frac{u^3}{3} + a^5 \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{a^5}{3} \tan^3 t + \frac{a^5}{5} \tan^5 t + c = \frac{a^5}{3} \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^3}{a^3} + \frac{a^5}{5} \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^5}{a^3} + c$$

$$= \frac{a^2}{3} (x^2-a^2)^{3/2} + \frac{a^2}{5} (x^2-a^2)^{5/2} + c //$$

$$\textcircled{4} \int \sec^3 x dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x dx$$

$$\sec x = u \Rightarrow du = \sec x \cdot \tan x \cdot dx$$

$$\sec^2 x = dv \Rightarrow \tan x = v$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{2x-3}{x^2+2x+2} dx = ?$$

$$\int \frac{2x-3}{(x+1)^2+1} dx \quad \begin{array}{l} x+1=u \Rightarrow dx=du \\ x=u-1 \quad 2x=2u-2 \end{array}$$

$$\int \frac{(2u-2)-3}{u^2+1} du = \int \frac{2u-5}{u^2+1} du = \int \frac{2u du}{u^2+1} - \int \frac{5}{u^2+1} du$$

$$= \ln|u^2+1| - 5 \operatorname{Arctan} u = \ln|x^2+2x+2| - 5 \operatorname{Arctan}(x+1) + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} = ?$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-4}}$$

$$\begin{array}{l} \sec t = \frac{x+3}{2}, \quad \csc t = \frac{2}{x+3} \\ x+3 = 2 \sec t \quad dx = 2 \sec t \tan t dt \\ = \frac{2}{\csc t} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x+3}{2} \triangle \frac{2}{\csc t} \sqrt{(x+3)^2-4} \\ \tan t = \frac{\sqrt{(x+3)^2-4}}{2} \end{array}$$

$$= \int \frac{2 \sec t \tan t dt}{2 \tan t} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x+3}{2} + \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{2} \right| + C$$

$$\textcircled{7} \int \sqrt{15+6x-9x^2} dx = ?$$

$$= \int \sqrt{-(9x^2-6x-15)} dx = \int \sqrt{-(3x-1)^2+16} dx = \int \sqrt{16-(3x-1)^2} dx$$

$$3x-1 = 4 \sin t \quad 3 dx = 4 \cos t dt \quad dx = \frac{4}{3} \cos t dt$$

$$= \frac{4}{3} \int \sqrt{16(1-\sin^2 t)} \cos t dt = \frac{16}{3} \int \cos^2 t dt = \frac{8}{3} \int (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{8}{3} t + \frac{8}{3} \sin t \cos t + C$$

$$\sin t = \frac{3x-1}{4} \Rightarrow t = \operatorname{Arcsin} \frac{3x-1}{4} \quad \frac{4}{3} \triangle \frac{3x-1}{4} \sqrt{-9x^2+6x+15}$$

$$= \frac{8}{3} \operatorname{Arcsin} \frac{3x-1}{4} + \frac{8}{3} \left(\frac{3x-1}{4} \right) \frac{\sqrt{-9x^2+6x+15}}{4} + C$$

$$= \frac{8}{3} \operatorname{Arcsin} \frac{3x-1}{4} + \frac{2}{3} (3x-1) \sqrt{-9x^2+6x+15} + C //$$

$$\textcircled{8} \int \sin 3\theta \cos 2\theta d\theta = ?$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 5\theta + \sin \theta d\theta$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 5\theta d\theta + \frac{1}{2} \int \sin \theta d\theta$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$= -\frac{1}{10} \cos 5\theta - \frac{1}{2} \cos \theta + C //$$

9) $\int \sin 4\theta \sin 2\theta \, d\theta = ?$

$$= \frac{1}{2} \int \cos \theta - \cos 7\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos \theta - \frac{1}{2} \int \cos 7\theta$$

$$= \frac{1}{2} (-\sin \theta) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} (-\sin 7\theta) + c = -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{14} \sin 7\theta + c.$$

10) $\int \tan^3 \theta \sec^4 \theta \, d\theta$

$$u = \tan \theta \Rightarrow du = (1 + \tan^2 \theta) d\theta = \sec^2 \theta \, d\theta \quad d\theta = \frac{du}{\sec^2 \theta}$$

$$= \int u^2 (1 + u^2) \sec^2 \theta \frac{du}{\sec^2 \theta}$$

$$= \int u^3 du + \int u^5 du = \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + c = \frac{\tan^4 \theta}{4} + \frac{\tan^6 \theta}{6} + c$$

Veya

$$\int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \quad \tan x = u \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$$

$$\int u^3 (1 + u^2) du \text{ olur.}$$

11) $\int \frac{\sqrt{x+2} \sqrt[6]{x^5}}{1 + \sqrt[3]{x}} \, dx = ?$

$$\text{ÖREK } (2, 6, 3) = 6 \quad x = t^6 \quad dx = 6t^5 dt$$

$$\int \frac{2\sqrt{t^6+2} \sqrt[6]{t^{6 \cdot 5}}}{1 + \sqrt[3]{t^6}} = \int \left(\frac{t^3 + 2t^5}{1 + t^2} \right) 6t^5 dt$$

$$= 6 \int \frac{t^8 + 2t^{10}}{1 + t^2} dt$$

$$\begin{array}{r} 2t^{10} + t^8 \quad | \quad t^2 + 1 \\ \underline{+ 2t^{10} + 2t^8} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \underline{- t^8} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \underline{+ t^8 + t^6} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \underline{t^6} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \underline{+ t^6 + t^4} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \underline{- t^4} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \underline{+ t^4 + t^2} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{t^2} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{+ t^2 + 1} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{- 1} \quad | \quad 2t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 \end{array}$$

$$= 6 \int \left(2t^8 - t^6 + t^4 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt$$

$$t = x^{1/6}$$

$$= 12 \frac{t^9}{9} - 6 \frac{t^7}{7} + 6 \frac{t^5}{5} + 6 \frac{t^3}{3} + 6t - 6 \operatorname{Arctan} t + c$$

$$= \frac{4}{3} t^9 - \frac{6}{7} t^7 + \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 + 6t - 6 \operatorname{Arctan} t + c$$

$$= \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{6}{7} x^{7/6} + \frac{6}{5} x^{5/6} - 2x^{1/2} + 6x^{1/6} - 6 \operatorname{Arctan} x^{1/6} + c //$$

12) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx = ?$ $\left(\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} \text{ ve } \int \sinh^2 x \cosh^6 x dx \right)$ Ödev //

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2} \left(\frac{2}{1+t^2} \right)}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} dt = 2 \int \frac{(t+1)^2 (1+t^2)^2}{(1+t^2)^2 4t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+2t+1}{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int t dt + \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{4} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

13) $\int \frac{7x^3 + 20x^2 + 35x - 13}{x^2(x^2 + 4x + 13)} dx = ?$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+13} \right) dx$$

$$x(x^2+4x+13)A + (x^2+4x+13)B + x^2(Cx+D) = 7x^3 + 20x^2 + 35x - 13$$

$$Ax^3 + 4x^2A + 13Ax + Bx^2 + 4Bx + 13B + x^3C + Dx^2 = 7x^3 + 20x^2 + 35x - 13$$

$$(A+C)x^3 + (4A+B+D)x^2 + (13A+4B)x + 13B = 7x^3 + 20x^2 + 35x - 13$$

$$A=3 \quad B=-1 \quad C=4 \quad D=9$$

$$= \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{4x+9}{x^2+4x+13} dx$$

$$= 3 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \int \frac{(2x+9)dx}{x^2+4x+13} + \int \frac{1}{x^2+4x+13} dx$$

$$= 3 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x^2+4x+13| + \int \frac{1}{(x+2)^2+9} dx$$

$$= 3 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x^2+4x+13| + \frac{1}{3} \operatorname{Arctan} \frac{(x+2)}{3} + c$$

- Belirli İntegraller -

[a,b]

$$x_1=a \quad \quad \quad b=x_n$$

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$$

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ buna $[a,b]$ nin bir ağı veya bölüntüsü denir.

$[x_k, x_{k+1}]$ 'e $[a,b]$ nin alt kapalı aralığı denir. $k=0, 1, \dots, n$

(x_k, x_{k+1}) " " " açık " "

$$a = [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n] = b$$

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n$$

$$\max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \} = \|P\| : P \text{ ağının normu (P görüntüsünün normu.)}$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (\text{aralıklar eşit olursa})$$

Tanım: $[a, b]$ nin iki tane ağı P_1 ve P_2 olsun.

$P_1 \subset P_2$ ise P_2 ye P_1 in incelməsi denir.

$$\left(\begin{array}{c} a \\ x_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \end{array} \quad b \right) \quad P_1 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \quad P_2 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad P_1 \subset P_2$$

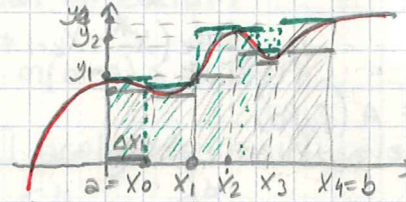
Tanım: $[a, b]$ nin $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ (P_n) $n \in \mathbb{N}$

$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$ incelenen dizisidir.

Tanım: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. (bu fonksiyon sınırlı olsun)

$$[x_k, x_{k+1}], \quad k=0, 1, \dots, n$$

$$x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$$



$$M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{k+1}, x_k] \} \quad (\sup = \text{EKÜS} \quad \inf = \text{EBAS})$$

$$m_k = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{k+1}, x_k] \}$$

$$\bullet \quad A(f, P) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \quad \text{toplama,}$$

f nin P ağına göre alt toplamı denir. (Eğrinin altında kaldığı için)

$$\bullet \quad \bar{U}(f, P) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \quad \text{toplama,}$$

f nin P ağına göre üst toplamı denir.

$$c_k \in [x_{k+1}, x_k] \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

$$\bullet \quad R(f, P) = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \quad \text{toplama,}$$

f nin P ağına göre Riemann Toplamı denir.

Teorem: $[a, b]$ kapalı aralığı verilsin. Eğer P_2 ağı, P_1 ağının incelməsi ise $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ dir.

Teorem: $[a, b]$ aralığına ait P ağı, P_0 ağının incelməsi ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonu bu aralıkta sınırlı ise

$$a - A(f, P_0) \leq A(f, P)$$

$$b - \bar{U}(f, P) \leq \bar{U}(f, P_0)$$

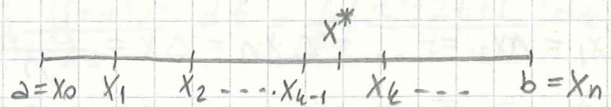
İspat // $P_0 \subset P$

$$P_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}$$

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x^*, x_k, \dots, x_n\}$$

$$m_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$



$$m_k' = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x^*]\} \quad m_k'' = \inf \{f(x) \mid x \in [x^*, x_k]\}$$

$$M_k' = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x^*]\} \quad M_k'' = \sup \{f(x) \mid x \in [x^*, x_k]\}$$

$$A(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + m_k' (x^* - x_{k-1}) + m_k'' (x_k - x^*) + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i$$

$$m_k' \geq m_k \quad m_k'' \geq m_k$$

$$m_k \geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \underbrace{m_k' (x^* - x_{k-1}) + m_k'' (x_k - x^*)}_{m_k (x^* - x_{k-1} + x_k - x^*)} + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i = A(f, P_0)$$

$$m_k (x^* - x_{k-1} + x_k - x^*) = m_k (x_k - x_{k-1}) = m_k \Delta x_k$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = A(f, P_0)$$

Sonuç // $[a, b]$ aralığında sınırlı ve reel değerli bir f fonksiyonunu alalım.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f 'nin $[a, b]$ 'deki en küçük değeri m , en büyük değeri

ise M olsun. $[a, b]$ aralığına ait bir P ağı,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ ise}$$

$$m(b-a) \leq A(f, P) \leq \bar{U}(f, P) \leq M(P-a) \text{ olur.}$$

Teorem: $[a, b]$ aralığının iki ağı (görüntüsü); P ve P_1 olsun.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bu aralıkta sınırlı ise,

a- $A(f, P) \leq \bar{U}(f, P)$

b- $A(f, P) \leq \bar{U}(f, P_1)$

İspat // a- $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$A(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n \quad m_i \leq M_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \bar{U}(f, P)$$

b- $P \subset P \cup P_1 \Rightarrow A(f, P) \leq A(f, P \cup P_1)$

$$\Rightarrow \bar{U}(f, P \cup P_1) \leq \bar{U}(f, P)$$

$$\left. \begin{aligned} A(f, P \cup P_1) &\leq \bar{U}(f, P \cup P_1) \\ &\leq \bar{U}(f, P) \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{A(f, P)} \leq A(f, P \cup P_1) \leq \bar{U}(f, P \cup P_1) \leq \bar{U}(f, P)$$

Teorem : $[a,b]$ aralığında sınırlı bir f fonksiyonunu ve $[a,b]$ aralığına ait ağların bir (P_n) inceleme dizisini gözönüne alalım.

$A(f, P_n)$ alt toplamlar dizisi, $\{A(f, P_n)\}$ monoton artan ve üstten sınırlı (yakınsak) bir dizidir.

$\bar{U}(f, P_n)$ üst toplamlar dizisi, $\{\bar{U}(f, P_n)\}$ monoton azalan ve alttan sınırlı (ıraksak) bir dizidir.

İspat // $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \dots$ $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$

$P_k \subseteq P_{k+1}$ olsun.

$A(f, P_k) \leq A(f, P_{k+1})$ (iki önceki teoremden)

0 halde bu dizi monoton artan bir dizidir.

$\bar{U}(f, P_k) \geq \bar{U}(f, P_{k+1})$ monoton azalan bir dizidir.

Her n için, $A(f, P_n) \leq M(b-a)$ $m(b-a) \leq \bar{U}(f, P_n)$

Tanım : $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı olsun.

$$\|P_n\| \rightarrow 0 \text{ gittiginde } \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} A(f, P_n) = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$$

limitine, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki alt integrali denir. Benzer şekilde,

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \bar{U}(f, P_n) = \int_a^b \bar{f} = \int_a^b \bar{f}(x) dx$$

limitine de, f nin $[a,b]$ aralığındaki üst integrali denir.

Tanım : $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer,

$\int_a^b f = \int_a^b \bar{f}$ ise bu fonksiyona, $[a,b]$ de integrallenebilir denir ve $\int_a^b f = \int_a^b \bar{f} = \int_a^b f(x) dx$ şeklinde gösterilir. $\int_a^b f(x) dx$ ifadesine f 'nin $[a,b]$ kapalı aralığındaki belirli integrali denir.

Teorem : $[a,b]$ aralığında sınırlı $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bu aralıkta integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul,

$$\forall \epsilon > 0 \text{ sayısı için, } \bar{U}(f, P) - A(f, P) < \epsilon$$

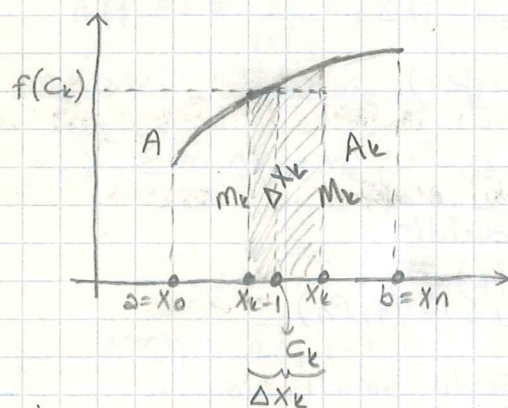
olacak şekilde, $[a,b]$ aralığının bir P ağının varolmasıdır. (bulunmasıdır.)

Eğri Altındaki Alan

*** Teorem:** $[a, b]$ de negatif olmayan sürekli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun gözönüne alalım. $[a, b]$ ye ait bir ağ,

$P_n = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b)$ olsun ve bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığına ait bir nokta da c_k olsun.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ve $[a, b]$ aralığına ait eğri altındaki alan; A_a^b ile gösterilirse, $\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = A_a^b$ olur.



(Bu teoremin ispatı, daha sonra verilecek.)

Teorem: $[a, b]$ aralığında sınırlı, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bu aralıkta integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul, $\forall \epsilon > 0$ sayısı için,

$$U(f, P) - A(f, P) < \epsilon$$

olacak şekilde $[a, b]$ aralığına ait bir P ağının var olmasıdır.

$$A(f, P) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

$$U(f, P) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n$$

ispat // $\int_a^b f = \inf \{ A(f, P_n) \mid P_n \in (P_n), \|P_n\| \rightarrow 0 \}$

$$\int_a^b f = \sup \{ U(f, P_n) \mid P_n \in (P_n), \|P_n\| \rightarrow 0 \}$$

$$f \text{ integrallenebilir} \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f$$

$$\forall \epsilon > 0, \int_a^b f - A(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \int_a^b f - A(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(f, P_2) - \int_a^b f < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow U(f, P_2) - \int_a^b f < \frac{\epsilon}{2}$$

Sağ tarafları toplarsak,

$$U(f, P_2) - A(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$P = P_1 \cup P_2$$

$$A(f, P_1) \leq A(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2)$$

$$\bar{U}(f, P) - A(f, P) \leq \bar{U}(f, P_2) - A(f, P_1) \leq \varepsilon$$

Kabul edelim ki, $\forall \varepsilon > 0$,

$\bar{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$ olacak şekilde bir P ağı bulunsun.

$$A(f, P) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \bar{f} \leq \bar{U}(f, P)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \bar{f} - \int_a^b f \leq \bar{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \int_a^b \bar{f} - \int_a^b f \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \bar{f} - \int_a^b f = 0 \Rightarrow \int_a^b \bar{f} = \int_a^b f \quad //$$

- İntegraller için Ortalama Değer Teoremi -

Teorem: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$ olacak biçimde, $[a, b]$ aralığına ait en az bir c sayısı vardır.

İspat // $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$
 $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ diyelim.

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } m \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ yazılır.}$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq M$$

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \mu \text{ diyelim.}$$

$$\Rightarrow m \leq \mu \leq M$$

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = \mu$$

$$\Rightarrow f(c) = \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

★

Teorem: (Diğer sayfadaki ilk teoremdir).

İspat // $m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k \Delta x_k \leq A_k \leq M_k \Delta x_k$$

$$\sum_{k=0}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^n A_k \leq \sum_{k=0}^n M_k \Delta x_k$$

$$A(f, P_n) \leq A_a^b \leq \bar{U}(f, P_n) \quad \forall n \text{ için doğrudur.}$$

$f, [a, b]$ aralığında sürekli olduğundan integrallenebilir.

$$\|P_n\| \rightarrow 0 \text{ iken } A(f, P_n) \rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f$$

$$U(f, P_n) \rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f$$

$$\int_a^b f \leq A_a^b \leq \int_a^b f$$

$$\Rightarrow A_a^b = \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{--- (1)}$$

$$c_k \in [a, b], \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad \text{--- (2)}$$

① ve ② den dolayı,

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = A_a^b \text{ olur.}$$

- İntegral Hesabın Temel Teoremleri -

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$, f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir bir olsun. Böylece F fonksiyonu, $[a, b]$ de tanımlı bir fonksiyon olur.

Teorem: (Birinci Temel Teorem):

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ tanımlanmış olsun. Bu takdirde

F fonksiyonu $[a, b]$ aralığında türevlenebilir ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$F'(x) = f(x) \text{ olur.}$$

İspat // $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$

$$= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

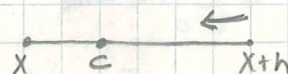
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad \text{--- (1)}$$

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = h \cdot f(c) \text{ olacak şekilde bir } c \in [a, b] \text{ vardır. --- (2)}$$

② ifadesini ① de yerine yazalım.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} h f(c) = f(c)$$

$\downarrow$
 $f(x)$



$$F'(x) = f(x) \text{ olur.}$$

Teorem : (İkinci Temel Teorem) :

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli, $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$[a, b]$ aralığında türevlenebilir ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\underline{F'(x) = f(x) \text{ ise } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

İspat // $[a, b]$ aralığının bir ağı $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ olsun.

F türevlenebilir ise F sürekli dir. O halde F fonksiyonuna bir alt aralık olan $[x_{k-1}, x_k]$ da, ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k} \underbrace{f(c_k)}_{f(\xi_k)} \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \Delta x_k f(x_k)$$

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1})$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} f(c_k) \Delta x_k = F(b) - F(a)$$

$$\underline{F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b}$$

Örnek 1 // $\int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = (2)^2 - 0^2 = 4 //$

2 // $\int_2^3 x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_2^3 = -\frac{1}{2x^2} \Big|_2^3 = -\frac{1}{2 \cdot 3^2} - \left(-\frac{1}{2 \cdot 2^2}\right) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{5}{72} //$

3 // $y = f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki ortalama değeri nedir?

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0)$$

$$= -(-1 - 1) = 2$$

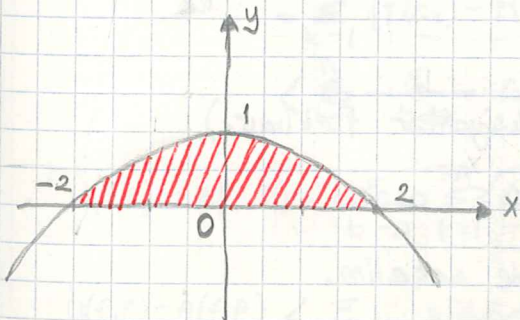
$$b-a = \pi - 0 = \pi$$

$$\mu = \frac{\int_0^\pi \sin x dx}{\pi} = \frac{2}{\pi} //$$

4 // $y = f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ eğrisi ile Ox eksenini arasında kalan alanı hesap ediniz.

$$y = -\frac{x^2}{4} + 1 \quad x=0 \Rightarrow y=1 \quad y=0 \Rightarrow x^2=4$$

$$\Rightarrow x_1=2 \quad x_2=-2$$



$$A = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left(-\frac{x^2}{4} + 1\right) dx = -\frac{x^3}{12} + x \Big|_{-2}^2$$

$$= \left(-\frac{8}{12} + 2\right) - \left(-\frac{8}{12} - 2\right) = \frac{8}{3} //$$

- Belirli İntegrallerin Özellikleri -

Teorem: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen f ve g fonksiyonlarını düşünelim.

a- $\int_a^a f = 0$

b- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad c \in [a, b]$

c- $\int_a^b f = -\int_b^a f$

d- $\int_a^b kf = k \int_a^b f$

e- $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

f- $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

g- $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$

_____ o _____ o _____ o _____

1- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton bir fonksiyon ise bu aralıkta integrallenebilirdir. Gösteriniz.

2- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

3- $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt \quad 0 < t < 1$ ise $F'(x) = ?$

4- $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+t}} dt \quad t > 0$ $F'(x) = ?$

5- $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad t > 0$ ise ortalama değer teoremini kullanarak c_k sayısını x_{k-1} ve x_k cinsinden bulunuz. $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

6-
$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
 fonksiyonu veriliyor.

a) $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$ b) $F(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(\frac{1}{2}) = ? \quad F'(\frac{3}{2}) = ?$

7- $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının $(0, \pi)$ aralığındaki ortalama değerini bulun.

Çözümler:

1- $f(a) \neq f(b)$ (fonksiyon artan olduğu için fonksiyonlar farklıdır.)

Öyle bir p eğri bulalım ki, $U(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ olacak şekilde seçelim.

Yukarıdaki eğri için, yazım doğru ise ispat gerçekleşir.

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k) \quad (\mathbb{R}' \text{ de max.})$$

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1}) \quad (\mathbb{R}' \text{ de min.})$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \Delta x_k \rightarrow \|P\|$$

$$\leq \|P\| \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \quad \|P\| \text{ yerine } \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \text{ yazalım.}$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0))$$

$$\left(\cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_0)} + \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_1)} + \dots + \cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{f(x_{n-1})} + \underline{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right)$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} f(b) - f(a) = \varepsilon \quad \text{olduğundan } f \text{ fonksiyonu}$$

$[a, b]$ de integrallenebilir.

2- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye sürekli ise düzgün sürekli dir. (kapalı aralık ise)

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(c_k) \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(d_k) \quad d_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{öyle bir } P \text{ ağı bulalım ki,}$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon \text{ olsun.}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, |c_k - d_k| < \delta \text{ olduğundan}$$

$$|f(c_k) - f(d_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (f \text{ düzgün sürekli olduğu için}) \quad \delta(\varepsilon) > 0 \text{ dir.}$$

ε 'a bağlı δ sayısı vardır. P ağını,

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ şartı sağlamak üzere } \|P\| < \delta \text{ olarak seçelim.}$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^n [f(c_k) - f(d_k)] \Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \quad x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a$$

$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$ olduğundan f fonksiyonu integrallenebilir.

3- $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$, $F'(x) = ?$

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = \sqrt{1-x^2}$

4- $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t} dt$ $x = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{x}$

$F'(x) = F'_u \cdot u'_x$

$F'(u) = \sqrt{1+u}$ $u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow F'(x) = (\sqrt{1+u}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}$

5- $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$ cinsinden yazmamız gerekir.

$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = f(c_k) (x_k - x_{k-1})$

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ $F = 2\sqrt{x}$ alırsak $F' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ O halde F yerinde $2\sqrt{x}$ olmalıdır.

$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}})$ olur.

$\Rightarrow f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = 2(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}) = \frac{1}{\sqrt{c_k}} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2} \frac{(x_k - x_{k-1})}{(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}})}$

$\Rightarrow (\sqrt{c_k}) = \frac{1}{2} \frac{(x_k - x_{k-1})(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})}{x_k - x_{k-1}} \Rightarrow \sqrt{c_k} = \frac{1}{2} (\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})$

$\Rightarrow c_k = \frac{1}{4} (\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})^2$

6- $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ a) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

$= \int_0^1 x dx + \int_1^2 \sin \pi x dx$

$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) \Big|_1^2$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \cos 2\pi + \frac{1}{\pi} \cos \pi$

$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} //$

b) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$F'(\frac{1}{2}) = ?$ $F'(\frac{3}{2}) = ?$

$F'(x) = f(x)$

$F'(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$F'(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$$7- \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{-\cos x \Big|_0^{\pi}}{(\pi-0)} = \frac{-\cos \pi - (-\cos 0)}{\pi} = \frac{-(-1) + 1}{\pi} = \frac{2}{\pi} //$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{\sin x \Big|_0^{\pi}}{\pi-0} = \frac{\sin \pi - \sin 0}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0 //$$

Soru // $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = ?$ $u = \sin x \quad du = \cos x dx$

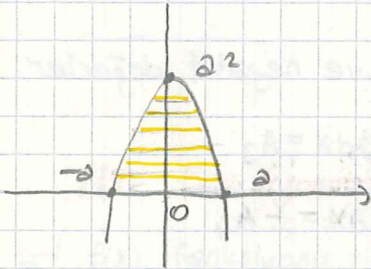
$$= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin x}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin \pi/2} - \left(\frac{-1}{\sin \pi/4} \right) = \frac{-1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}/2} = -1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2} //$$

Soru // $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = ?$

$$= \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln(1+1) - \ln(0+1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 //$$

Soru // $y = -x^2 + a^2$ eğrisinin x eksenine ile sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$A = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \int_{-a}^a a^2 dx - \int_{-a}^a x^2 dx$$

$$= a^2 x \Big|_{-a}^a - \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a$$

$$= a^2 + a^2 - \frac{1}{3} a^3 - \left(-\frac{1}{3} a^3 \right)$$

$$= 2a^2 - \frac{2}{3} a^3 = \frac{4}{3} a^2 //$$

Ödev // $\int_{-3}^5 |x^2 - 3x + 2| dx = ?$ $\left(\frac{128}{3} \right)$

1- $\int_a^a f(x) dx = F(x) \Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$

2- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = F(x) \Big|_a^c = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x) dx = F(x) \Big|_c^b = F(b) - F(c)$$

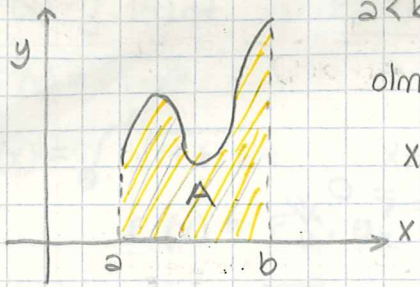
$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(x) dx$$

3- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -[F(x) \Big|_b^a] = -\int_b^a f(x) dx$$

Belirli integraller ve Temsil Ettikleri Alanların İşaretleri :

1-



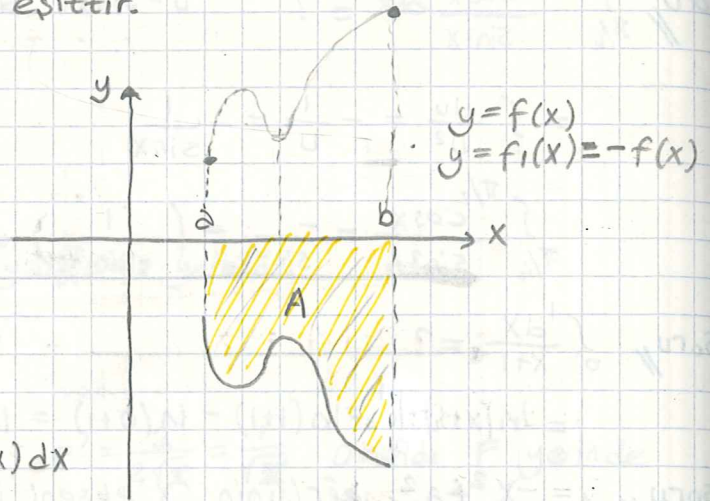
$a < b$ olsun. $f(x)$, pozitif bir fonksiyon olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ integrali Ox eksenini, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile $f(x)$ 'i temsil eden eğri tarafından sınırlanan bölgenin A alanına eşittir.

2- $a < b$ olsun. $f(x)$, negatif bir fonksiyon olsun. (a, b) aralığı açık veya kapalı olabilir.)

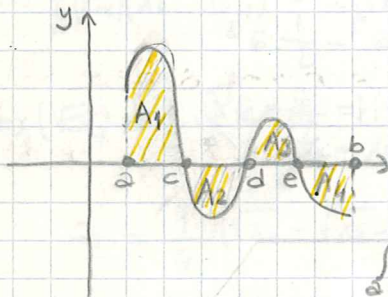
$$A = \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b -f(x) dx$$

$$A = -\int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = -A$$

$f(x)$ 'in negatif olması halinde $\int_a^b f(x) dx$ integrali, alanın negatif işaretlisine eşittir.



3- $a < b$ olsun. $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif ve negatif değerler almaktadır.



$$\int_a^c f(x) dx = A_1$$

$$\int_d^e f(x) dx = A_3$$

$$\int_c^d f(x) dx = -A_2$$

$$\int_e^b f(x) dx = -A_4$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^e f(x) dx + \int_e^b f(x) dx$$
$$= A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$\int_a^b f(x) dx$ alanı buna karşılık gelen alanların cebirsel toplamına eşittir.

İntegrasyon Aralığının Sonsuz Olması Hâli :

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ (a, b) aralığı yerine, $(a, +\infty)$ olabilir. O zaman $F(x)$ fonksiyonu bu aralıkta tanımlı olduğunda,

① $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a)$ olur. Aralığımız $(-\infty, b)$ ise, integral ;

② $\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$ olur. Aralığımız $(-\infty, +\infty)$ ise, integral ;

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ olur.

Örnek 1 // $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2x+3)^2} = ?$

$$\int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2(1-2)} \cdot \frac{1}{(2x+3)} = -\frac{1}{2(2x+3)} = F(x)$$

$$= -\frac{1}{2(2x+3)} \Big|_0^{+\infty}$$

$$F(b) - F(0) = -\frac{1}{2(2b+3)} - \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2(2b+3)} \right] + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} //$$

Örnek 2 // $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^4}$

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

$$F(2) = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} = -\frac{1}{24} \quad F(a) = -\frac{1}{3a^3}$$

$$= -\frac{1}{24} - \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{1}{3a^3} = -\frac{1}{24} //$$

Örnek 3 // $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan } x$$

$$F(0) = \text{Arctan } 0 = 0$$

$$= (F(0) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \text{Arctan } a) + (\lim_{b \rightarrow +\infty} \text{Arctan } b - F(0))$$

$$F(a) = \text{Arctan } a$$

$$= -\lim_{a \rightarrow -\infty} \text{Arctan } a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \text{Arctan } b$$

$$F(b) = \text{Arctan } b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \text{Arctan } b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \text{Arctan } a = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi //$$

$\frac{\pi}{2} \quad \quad \quad -\frac{\pi}{2}$

f(x) Fonksiyonunun Sonsuz Olması :

1- f(x) fonksiyonu, integrasyon sınırlarından bir tanesinde sonsuz olabilir.

Kabul edelim ki $x=b$ noktasında fonksiyon sonsuzda olsun. Bu takdirde ;

integral, $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$ ile hesaplanır.

2- fonksiyon $x=a$ da sonsuz değerini alabilir. Bu durumda integral ;

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a} F(x) \quad \text{ile hesaplanır.}$$

3- fonksiyon $x=a$ ve $x=b$ de sonsuzda ise ,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x) \quad \text{ile hesaplanır.}$$

Örnek 1 // $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad u=1-x \quad du=-dx \quad -du=dx$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-1/2} du = -2u^{1/2}$$

$$= -2\sqrt{1-x}$$

$$F(a) = F(0) = -2\sqrt{1-0} = -2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 1} (-2\sqrt{1-x}) - (-2) = 2 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) - F(0)$$

Örnek 2 // $\int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = ?$

$F(x) = \int \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = \frac{1}{1(1-\frac{2}{3})} \cdot \frac{1}{(x-3)^{\frac{2}{3}-1}} = 3 \frac{1}{(x-3)^{-1/3}} = 3(x-3)^{1/3}$

$\Rightarrow F(x) = 3\sqrt[3]{x-3} \Rightarrow F(4) = 3$

$\int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = F(4) - \lim_{x \rightarrow 3} F(x)$

$= 3 - 0 = 3 //$

Örnek 3 // $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

fonksiyon alt ve üst sınırdaki tanımsızdır.

$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin } x$

$\int_{-1}^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 1} \text{Arcsin } x - \lim_{x \rightarrow -1} \text{Arcsin } x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi //$

İki Eğri Arasında Kalan Alan

Kabul edelim ki f ve g , $[a,b]$ de sürekli fonksiyon olsunlar. Ve bu

$[a,b]$ nin bir ağı da,

$P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ olsun.

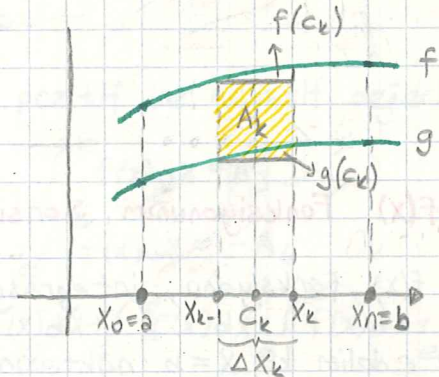
$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$A_k \approx [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$

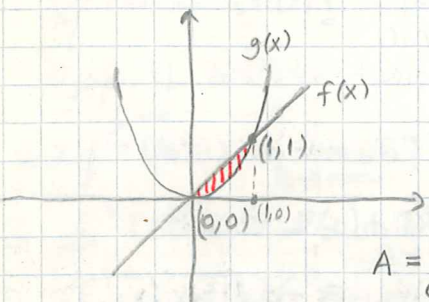
$A = \sum_{k=1}^n A_k \Rightarrow A \approx \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$

$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = A$

$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = A$



Örnek 1 // $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ olduğuna göre f ve g eğrileri arasında kalan bölgenin alanını hesap ediniz.



$x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1$

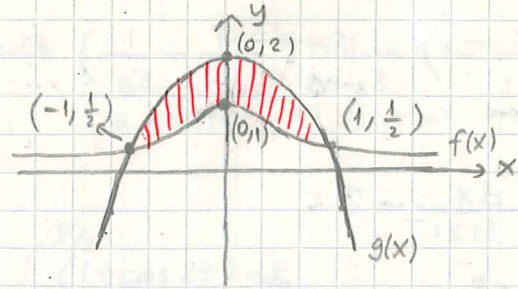
$(0,0)$ ve $(1,1)$ kesim noktalarıdır.

$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$

$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - 0 = \frac{1}{6} \text{ br}^2 //$

Örnek 2 // $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = 2 - \frac{3x^2}{2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanı ? 393

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad g(x) = -\frac{3x^2}{2} + 2$$



$$\frac{1}{x^2+1} = -\frac{3x^2}{2} + 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{-3x^2+4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2(x^2+1)} = \frac{(-3x^2+4)(x^2+1)}{2(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow -3x^4 - 3x^2 + 4x^2 + 4 = 2 \Rightarrow -3x^4 + x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^4 - x^2 - 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \\ y_1 = \frac{1}{2} \quad y_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} (1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$$

$$A = 2 \int_0^1 \left[\left(2 - \frac{3x^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{x^2+1} \right) \right] dx = 2 \left[\int_0^1 \left(2 - \frac{3x^2}{2} \right) dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \right]$$

$$= 2 \left[2x - \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \text{Arctan } x \Big|_0^1 \right] = 2 \left[2x - \frac{x^3}{2} \Big|_0^1 - \text{Arctan } x \Big|_0^1 \right]$$

$$= 2 \left[\left(2 - \frac{1}{2} \right) - 0 - (\text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0) \right] = 2 \left[\frac{3}{2} - \text{Arctan } 1 + \text{Arctan } 0 \right]$$

$$= 3 - 2 \underbrace{\text{Arctan } 1}_{\frac{\pi}{4}} + 2 \text{Arctan } 0 = 3 - \frac{\pi}{2} \text{ br }^2 //$$

$$1- \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ? = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1+\epsilon_1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_0^{1+\epsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ? \quad 1-\epsilon_2$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left[\text{Arcsin } x \Big|_{-1+\epsilon_1}^0 \right] + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \left[\text{Arcsin } x \Big|_0^{1+\epsilon_2} \right]$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left[\underbrace{\text{Arcsin } 0}_0 - \text{Arcsin } (-1+\epsilon_1) \right] + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \left[\text{Arcsin } (1+\epsilon_2) - \underbrace{\text{Arcsin } 0}_0 \right]$$

$$= -\text{Arcsin } (-1) + \text{Arcsin } 1$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi //$$

★ önemli !

$$2- \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = ? = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon_2}^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

★ (ϵ_1 sıfırdan büyük bir sayıdır. Sıfıra çok yakındır $1+\epsilon_1$ yerine $1-\epsilon_1$ almamız.)

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{(x-1)} \right]_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{(x-1)} \right]_1^{1+\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty \quad \text{bir limit yoktur. Fonksiyon integrallenebilir.}$$

$$3- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -\infty} \int_{\varepsilon_1}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon_2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x \Big|_{\varepsilon_1}^0 + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} \text{Arctan } x \Big|_0^{\varepsilon_2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -\infty} (\underbrace{\text{Arctan } 0}_0 - \text{Arctan } \varepsilon_1) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} (\text{Arctan } \varepsilon_2 - \underbrace{\text{Arctan } 0}_0)$$

$$= +\text{Arctan } \infty + \text{Arctan } \infty = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi //$$

Bu limit olduğu için fonksiyon integrallenebilir.

$$4- \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx - 2 \int_2^3 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx - \int_5^2 f(x) dx - \int_4^5 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx$$

olduğunu gösteriniz.

$$\Rightarrow \int_1^2 f + \int_2^3 f - \int_3^4 f - 2 \int_2^3 f + \int_2^4 f + \int_3^4 f + \int_2^5 f + \int_4^5 f$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f + \int_2^4 f + \int_4^5 f - \int_4^5 f = \int_1^2 f + \int_2^4 f = \int_1^4 f$$

$$5- \int_{e^{3x}}^{e^{x^2}} \frac{du}{u} = 4 \quad \text{denkleminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

$$\ln u \Big|_{e^{3x}}^{e^{x^2}} = 4 \Rightarrow \ln e^{x^2} - \ln e^{3x} = 4$$

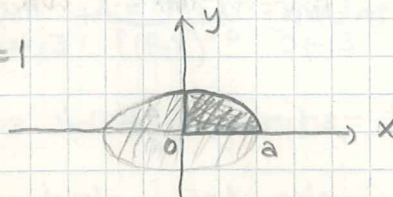
$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$$

$$6- \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = 1 \quad \text{olduğunu gösterin.}$$

7- Elipsin alanını bulunuz.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$A = 4 \int_0^a y dx \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$x = a \sin t \quad dx = a \cos t dt$$

• $\left(\int_a^b f(x) dx, f(x)=f(y) \quad f(a)=a_1 \text{ ve } f(b)=a_2 \text{ olsun. } \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx \text{ olur.} \right)$

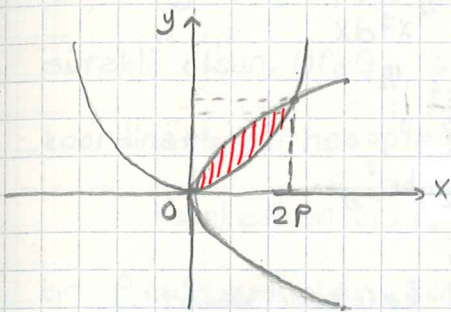
$$A = 4 \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow a \sin t = 0 \Rightarrow t=0 \\ x=a \Rightarrow a = a \sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right.$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 2ab \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = 2ab \left[\frac{\pi}{2} \right] = \pi ab // \text{ (elipsin alanıdır.)}$$

8- $y^2 = 2px$ ve $x^2 = 2py$ parabolleri arasında kalan alanı bulunuz.



$$x^2 = 2p\sqrt{2px}$$

$$x^4 - 8p^3 x = 0$$

$$x(x^3 - 8p^3) = 0 \quad x_1 = 0$$

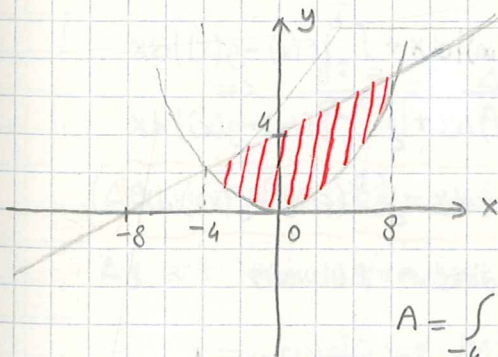
$$x^3 - 8p^3 = 0 \quad (x-2p)(x^2 + 4p^2 + 4p^2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2p$$

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

$$A = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \sqrt{2p} \int_0^{2p} x^{1/2} dx - \frac{1}{2p} \int_0^{2p} x^2 dx$$

$$= \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{3/2} \Big|_0^{2p} - \frac{1}{3 \cdot 2p} x^3 \Big|_0^{2p} = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot 2p \sqrt{2p} - \frac{4p^3}{3} = \frac{8}{3} p^2 - \frac{4}{3} p^2 = \frac{4}{3} p^2 //$$

9- $x^2 = 8y$ parabolünün $x - 2y + 8 = 0$ doğrusu ile sınırladığı bölgenin alanını bul:



$$y = \frac{x+8}{2} \quad x^2 = 8 \frac{x+8}{2} \Rightarrow x^2 = 4x + 32$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 32 = 0$$

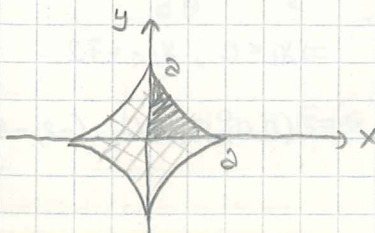
$$\Rightarrow x_1 = 8, x_2 = -4$$

$$A = \int_{-4}^8 \left(\frac{x+8}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \int_{-4}^8 \frac{1}{2} x dx + 4 \int_{-4}^8 dx - \frac{1}{8} \int_{-4}^8 x^2 dx$$

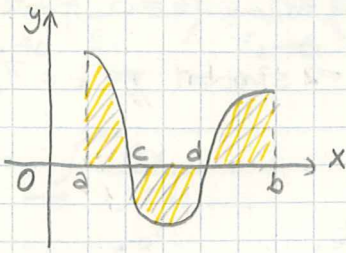
$$= \frac{1}{4} x^2 + 4x - \frac{1}{24} x^3 \Big|_{-4}^8 = 36 \text{ br}^2$$

10- $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz $(3\pi a^2/8)$

(Bak Sayfa 401)

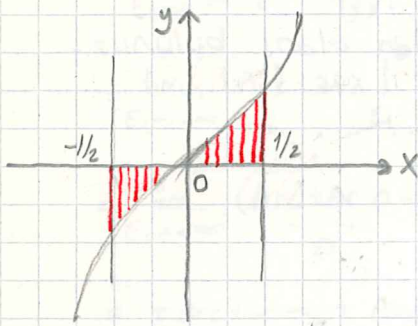


$$S = \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \text{Alan formülü}$$



$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^d (-f(x)) dx + \int_d^b f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \end{aligned}$$

Örnek,, $y = x^3$ eğrisi ve $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ doğruları ve x eksenini tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz?



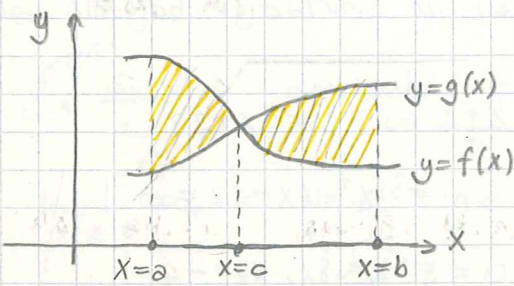
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1/2}^{1/2} |x^3| dx = \int_{-1/2}^0 |x^3| dx + \int_0^{1/2} |x^3| dx \\ &= \int_{-1/2}^0 -x^3 dx + \int_0^{1/2} x^3 dx \\ &= -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1/2}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{1}{32} \text{ br}^2 // \end{aligned}$$

Uyarı: $\int_{-1/2}^{1/2} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{64} - \frac{1}{64} = 0$ (Alan ile integral karıştırılmamalıdır.)

İki Eğri Arasındaki Alan Formülü (Genel Olarak)

Kabul edelim ki, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin S alanı,

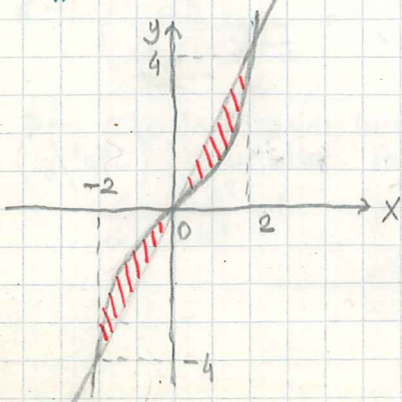
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ olsun.}$$



$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b -(f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^c (f(x) - g(x)) dx - \int_c^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

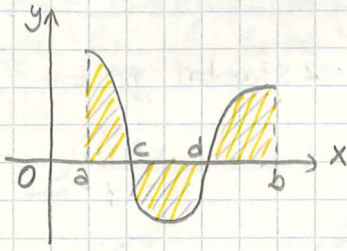
şeklinde bu alanlar bulunur.

Örnek,, $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 2x$ eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.



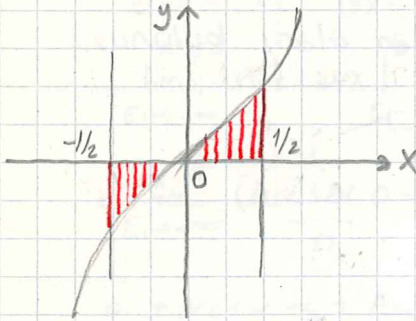
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x \right| dx \quad \frac{1}{2}x^3 = 2x \Rightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x(x^2 - 4x) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2 \\ &\Rightarrow (0,0), (2,4), (-2,-4) \end{aligned}$$

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \text{Alan formülü}$$



$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^d (-f(x)) dx + \int_d^b f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \end{aligned}$$

Örnek,, $y = x^3$ eğrisi ve $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ doğruları ve x eksenini tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz?



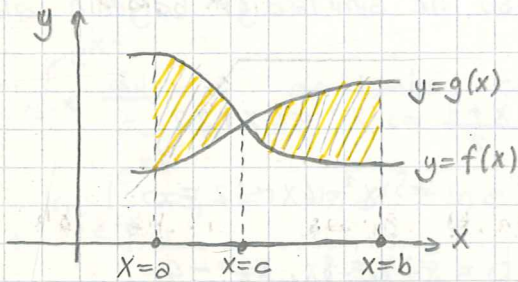
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1/2}^{1/2} |x^3| dx = \int_{-1/2}^0 |x^3| dx + \int_0^{1/2} |x^3| dx \\ &= \int_{-1/2}^0 -x^3 dx + \int_0^{1/2} x^3 dx \\ &= -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1/2}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{1}{32} \text{ br}^2 // \end{aligned}$$

Uyarı: $\int_{-1/2}^{1/2} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{64} - \frac{1}{64} = 0$ (Alan ile integral karıştırılmamalıdır.)

İki Eğri Arasındaki Alan Formülü (Genel Olarak)

Kabul edelim ki, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin S alanı,

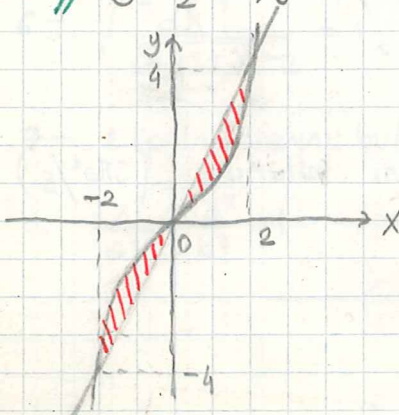
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ olsun.}$$



$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b -(f(x) - g(x)) dx \\ S &= \int_a^c (f(x) - g(x)) dx - \int_c^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

şeklinde bu alanlar bulunur.

Örnek,, $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 2x$ eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.



$$S = \int_{-2}^2 \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x \right| dx \quad \frac{1}{2}x^3 = 2x \Rightarrow x^3 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4x) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$$

$$\Rightarrow (0, 0), (2, 4), (-2, -4)$$

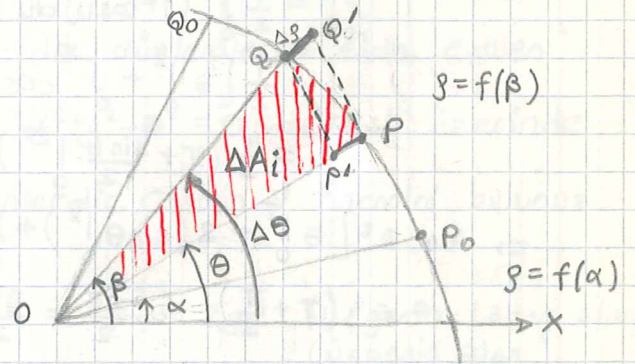
$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^0 \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x \right| dx + \int_0^2 \left| \frac{1}{2}x^3 - 2x \right| dx \\
 &= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x \right) dx + \int_0^2 - \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x \right) dx \\
 &= \left(\frac{x^4}{8} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{8} - x^2 \right) \Big|_0^2 = -(2-4) - (2-4) = 2+2 = 4 \text{ br}^2 //
 \end{aligned}$$

Kabul edelim ki, eğri $x = \varphi(y)$ biçiminde verilsin. Bu eğri, $y=c$ ve $y=d$ doğruları ile y eksenini tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı;
 $S = \int_c^d |\varphi(y)| dy$ ile hesaplanır.

Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

Eğri, $\rho = f(\theta)$ biçiminde verilsin. Bu fonksiyon bir (α, β) aralığında sürekli olsun. OP_0Q_0 alanını kutupsal koordinatlarda hesaplayalım.

Kabul edelim ki, P_0 ve Q_0 arasında bir P noktası olsun. Buraya karşılık gelen açı da θ olsun. θ 'ya bir $\Delta\theta$



artması verelim. θ 'ya karşılık gelen ırsın ρ ise, artması da $\rho + \Delta\rho$ olur. θ artmasının olduğu noktaya da Q diyelim.

$$\begin{aligned}
 OQ P' &< \Delta A_i < OPQ' \\
 \Rightarrow \frac{\rho^2 \Delta\theta}{2} &\leq \Delta A_i \leq \frac{(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\theta}{2} \\
 \Rightarrow \frac{\rho^2}{2} &\leq \frac{\Delta A_i}{\Delta\theta} \leq \frac{(\rho + \Delta\rho)^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Alan} = \frac{(\rho + \Delta\rho) \Delta\theta}{2}$$

($\Delta\theta$ yi sıfıra doğru yaklaştıralım. O zaman, Q noktası P 'ye yaklaşır. $\Delta\rho$ artması sıfıra yaklaşır.)

$$\Rightarrow \frac{\rho^2}{2} \leq \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta A_i}{\Delta\theta} \leq \frac{\rho^2}{2}$$

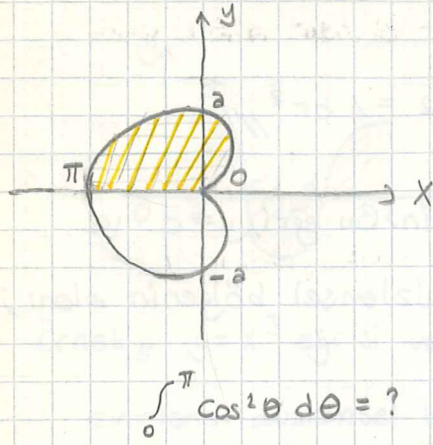
Bu limit, bu alanın θ 'ya göre türevini verir.

$$\frac{dA_i}{d\theta} = \frac{\rho^2}{2} \Rightarrow dA_i = \frac{\rho^2}{2} d\theta \Rightarrow A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

(kutupsal koordinatlarda alan formülü)

$$\int \rho^2 d\theta = F(\theta) \Rightarrow A = \frac{1}{2} (F(\beta) - F(\alpha)) \text{ olur.}$$

Örnek,, $y = a(1 - \cos \theta)$ denklemi ile verilen kardioidin alanını bulunuz.



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \underbrace{a^2(1 - \cos \theta)^2}_{y^2} d\theta$$

$$A = \int_0^\pi a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

$$A = a^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$A = a^2 \left[\int_0^\pi d\theta - 2 \int_0^\pi \cos \theta + \int_0^\pi \underbrace{\cos^2 \theta}_{?} d\theta \right]$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = ?$$

$$= \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2\theta) d\theta \Rightarrow u = 2\theta, du = 2d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos u) du = \frac{1}{2} \left[\int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi \cos u d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \right] = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos u du \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\sin u}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{2} \pi + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A = a^2 \left[\theta \Big|_0^\pi - 2(\sin \theta \Big|_0^\pi) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= a^2 \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = a^2 \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} a^2 \text{ br } //$$

Eğrinin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Alanın Hesaplanması

Kabul edelim ki, eğrinin herhangi bir noktasının koordinatları

$x = g(t)$ $y = h(t)$ şeklinde, t parametresi cinsinden verilmiş olsunlar.

Bu takdirde verilen eğri, OX eksenini ve $X=a$, $X=b$ doğruları arasında kalan

A alanının hesabı aşağıdaki şekilde yapılır.

$$A = \int_a^b y dx \text{ formülüyle bulunur.}$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \Rightarrow d(x) = g'(t) dt \Rightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} h(t) g'(t) dt \text{ olur.}$$

Hacim Hesapları

Paralel Tabanlı Bir Cismin Hacminin Hesabı



Bu cismin hacmini belirli integral ile bulalım.

Kesitin hacmini ΔV ile gösterelim. Bu kesitlerin büyüğüne A_1 , küçüğüne A diyelim. A_1 'i Δx ile çarparsak, küçük bir silindirin alanı çıkar.

$$A \Delta x \leq \Delta V \leq A_1 \Delta x$$

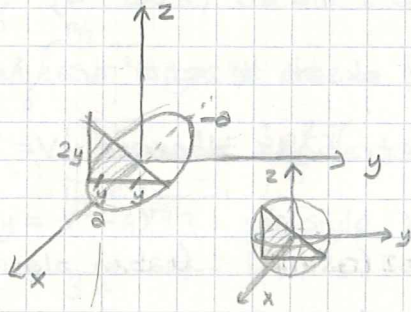
$$\Rightarrow A \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq A_1$$

$$\Rightarrow A \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq A_1 \quad (A_1 \text{ ve } A, x\text{'e bağlı fonksiyonlardır.})$$

$$\frac{dV}{dx} = A(x) \Rightarrow dV = A(x) dx$$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Örnek, Bir cisim xy düzlemi tarafından $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ dairesi boyunca kesilmektedir. Bu cismin, ox eksenine dik düzlemlerle elde edilen kesitleri, bir dik kenarı bu düzlemlerin $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ dairesi üzerinde ayırdığı kirise eşit ikizkenar dik üçgenlerdir. Cismin V hacmini bulunuz.



$$A(x) = \frac{2y \cdot 2y}{2} = \frac{4y^2}{2} = 2y^2 \quad (\text{Üçgenin taban alanı})$$

(Üçgenin alanı)

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_{-a}^a 2y^2 dx$$

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow V = 2 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 2 \left[a^2 x \Big|_{-a}^a - \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a \right) \right]$$

$$\Rightarrow V = 2 \left[(a^3 + a^3) - \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) \right] = 2 \frac{4a^3}{3} = \frac{8a^3}{3} \text{ br}^3 //$$

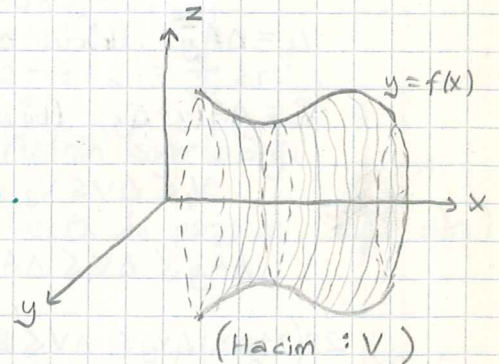
- Dönel Cisimlerin Hacmi -

Kabul edelim ki, $y=f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad A(x) = \pi r^2 = \pi y^2$$

$$= \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \dots \text{Dilimleme Metodu.}$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



(Hacim : V)

Uyarı, Eğer eğri ox yerine oy etrafında

dönerse, $V = \pi \int_c^d x^2 dy$ olur. (c ve d , y 'nin sınırlarıdır.) $x = \varphi(y)$ ise

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy \text{ olur.}$$

Örnek $x^2 - y^2 = a^2$ hiperbolü, önce ox eksenini, sonra oy eksenini etrafında döndürülüyor. Birinci dönmeye $(a, 2a)$, ikinci dönmeye $(0, a)$ aralığına karşılık gelen hacimleri bulunuz.

$$V = \pi \int_a^{2a} y^2 dx$$

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = x^2 - a^2$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_a^{2a} (x^2 - a^2) dx$$

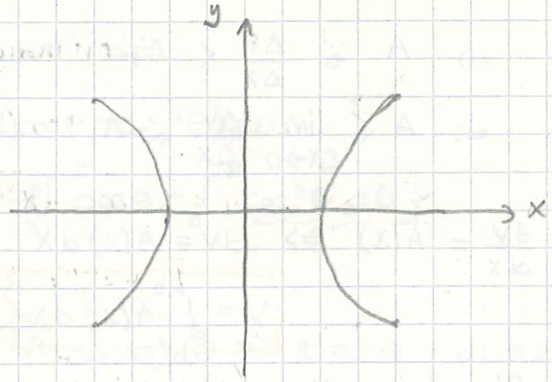
$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \Big|_a^{2a}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{8a^3}{3} - 2a^3 \right) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3 \right) \right]$$

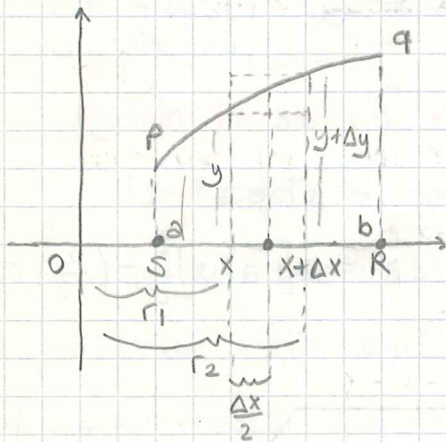
$$= \pi \left(\frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ br}^3 //$$

$$V = \pi \int_0^a x^2 dy = \pi \int_0^a (y^2 + a^2) dy = \pi \left(\frac{y^3}{3} + a^2 y \right) \Big|_0^a$$

$$= \pi \left[\left(\frac{a^3}{3} + a^3 \right) - 0 \right] = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ br}^3 //$$



.... Silindirik Tabakalar Metodu



$x=a, x=b$, ox eksenini ile eğri arasındaki bölge y eksenini etrafında dönerse $V=?$

$$\Delta A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi (r_2^2 - r_1^2) \text{ (taban alanı)}$$

$$= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

$$= 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1)$$

$$= 2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) \Delta x \text{ (Silindirin taban alanı)}$$

$$V_1 = \Delta A y \text{ (küçük olanın)}$$

$$V_2 = \Delta A (y + \Delta y) \text{ (büyük olanın)}$$

$$V_1 \leq \Delta V \leq V_2$$

$$\Delta A y \leq \Delta V \leq \Delta A (y + \Delta y)$$

$$2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) \Delta x y \leq \Delta V \leq 2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) \Delta x (y + \Delta y)$$

$$2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) y \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq 2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) (y + \Delta y) \quad (\Delta x \text{ 'i sıfıra götürelim.})$$

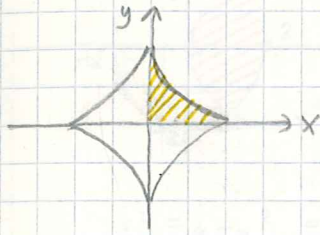
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) y \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\pi \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) (y + \Delta y)$$

$$2\pi xy \leq \frac{dV}{dx} \leq 2\pi xy$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2\pi xy \Rightarrow dv = 2\pi xy dx$$

$$V = \int_a^b 2\pi xy dx \Rightarrow V = 2\pi \int_a^b xy dx \quad (\text{Dönel cismin hacmi})$$

1- $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



$$y^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{(a^{2/3} - x^{2/3})^2}$$

$$\frac{A}{4} = \int_0^a y dx = \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx$$

($x^{1/3} = a^{1/3} \sin t$ dönüşümü yapılırsa, $\frac{1}{3} x^{-2/3} dx = a^{2/3} \cos t dt$ olur.)

$$x^{1/3} = a^{1/3} \sin t \Rightarrow (x^{1/3})^2 = a^{2/3} \sin^2 t \Rightarrow \underline{x^{2/3}} = a^{2/3} \sin^2 t$$

$$\frac{1}{3} x^{-2/3} dx = a^{1/3} \cos t dt$$

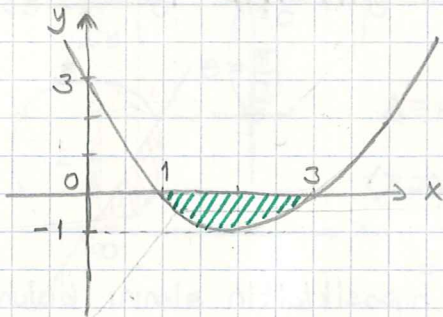
$$dx = 3a^{1/3} x^{2/3} \cos t dt$$

$$\Rightarrow dx = 3a^{1/3} a^{2/3} \sin^2 t \cos t dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} (a^{2/3} - a^{2/3} \sin^2 t)^{3/2} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (a^{2/3} \cos^2 t)^{3/2} 3a \sin^2 t \cos t dt \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t dt = (\text{Bak sayfa 373}) = \frac{3a^2 \pi}{32} = \frac{A}{4} \end{aligned}$$

$$A = \frac{3a^2 \pi}{8} \approx br^2$$

2- $y = x^2 - 4x + 3$ eğrisiyle x ekseninde kalan alanı bulunuz.



$$A = \int_1^3 |f(x)| dx$$

$$= \int_1^3 -f(x) dx$$

$$= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$= -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - 3x \Big|_1^3$$

$$= -9 + \frac{1}{3} + 18 - 2 - 9 + 3 = \frac{4}{3} br^2 //$$

3- $y^2 = a^2 \sin 2\theta$ denklemiyle verilen Lenniskat eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

($\sin px$ in periyodu $\frac{2\pi}{p}$ dir.)

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad y = \pm a \sqrt{\sin 2\theta}$$

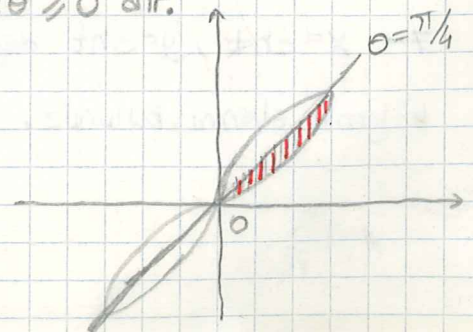
$\sin 2\theta \geq 0$ olmalıdır.

$[0, \pi/2]$ de $\sin 2\theta \geq 0$ dir.

$$0 \leq \sin 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

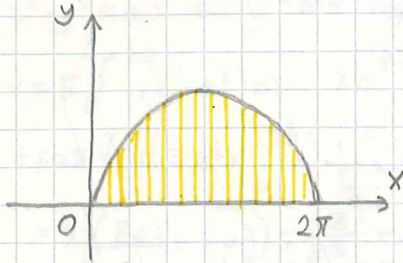
$$\frac{A}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} y^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta d\theta$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} a^2 \Rightarrow A = a^2 //$$



Not// Lemniskat eğrisinin alanı, bir kenarının uzunluğu a olan karenin alanına eşittir.

4- $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ denklemleri ile verilen sikloid ile x ekseninde kalan alanı hesaplayınız.



$$x = g(t) \quad y = h(t)$$

$$A = \int_0^{2\pi} h(t) g'(t) dt$$

$$g'(t) = a(1 - \cos t)$$

$$A = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

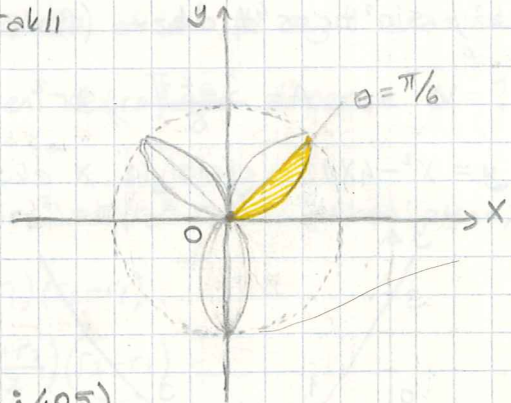
$$= a^2 \left(t - 2\sin t \right) \Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt$$

$$= a^2 2\pi + \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$A = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3a^2 \pi //$$

5- $\rho = a \sin 3\theta$ şeklinde verilen 3 yapraklı

gül eğrisinin sınırladığı bölgenin alanının, bu eğri dışına çizilen dairenin alanına eşit olacağını gösteriniz.

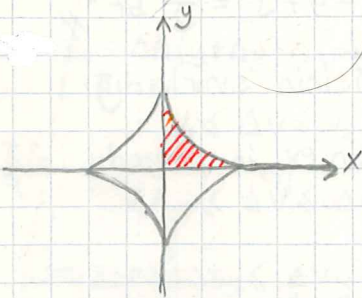


$$\frac{A}{6} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{4} \pi //$$

(Bk. S: 405)

6- $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ denklemleriyle verilen hiposikloidin alanını bulunuz.

(Bk. S: 405)

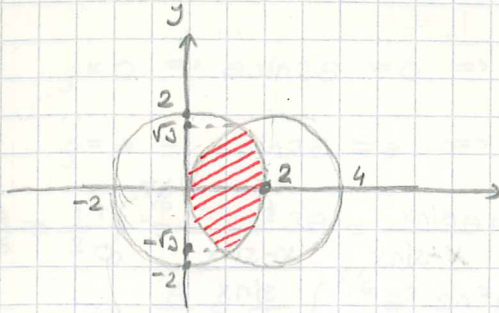


7- $x = ch t$, $y = sh t$ denklemleriyle verilen ikizkenar hiperbolün sınırladığı

bölgenin alanını bulunuz. $A = \frac{t}{2} //$

1- $x^2+y^2=4$ ve $x^2+y^2=4x$ eğrilerinin sınırladığı

bölgenin alanını bulunuz.



$$x^2+y^2=4, \quad M(0,0) \quad r=2$$

$$x^2+y^2=4x \quad M(2,0) \quad r=2$$

$$4x=4 \Rightarrow x=1$$

$$1+y^2=4 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

$$x^2=4-y^2 \Rightarrow x=\sqrt{4-y^2}$$

$$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow (x-2)^2=4-y^2 \Rightarrow x-2=\sqrt{4-y^2} \Rightarrow x=2+\sqrt{4-y^2}$$

$$A=2 \int_0^{\sqrt{3}} [\sqrt{4-y^2} - (2+\sqrt{4-y^2})] dy$$

$$A=2 \int_0^{\sqrt{3}} |1-2| dy$$

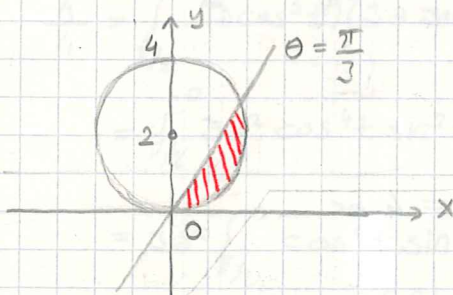
$$A=2 \int_0^{\sqrt{3}} 1 dy = 4y \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ br}^2 //$$

2- $\rho=4\sin\theta$ eğrisiyle $\theta=\frac{\pi}{3}$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

$$\rho \cdot \rho = 4 \sin \theta \cdot \rho \Rightarrow \rho^2 = 4 \rho \sin \theta$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4 \quad M(0,2) \quad r=2 \text{ çemberidir.}$$



$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 16 \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 8 \int_0^{\pi/3} \sin^2 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 4 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/3} = 4 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \text{ br}^2 //$$

3- $\rho=4\sin\theta$, $\rho=4\cos\theta$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanı nedir? (Bk. S: 405)

4- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{0 \cdot 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ belirsizlik - (L'Hospital'den)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \sin x + \cos x \cdot x}{\sin x} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x \cdot x + \cos x}{\cos x} = \frac{1 - 0 + 1}{1} = 2 //$$

5- $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1 - \cos nA}{A^2} = ?$ $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{n \sin nA}{2A} = \frac{0}{0}$ belirsizlik.

$= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{n^2 \cos nA}{2} = \frac{n^2 \cos 0}{2} = \frac{n^2}{2} //$

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = ?$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ $\frac{\sin x}{x - \sin x} = \frac{1}{\frac{x - \sin x}{\sin x}} = \frac{1}{0} = \infty$

$= 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{\sin x} - 1 \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x} - 1 \right)}_{f(x)} \right)^{\frac{1}{\frac{x}{\sin x} - 1} f(x)} = e //$

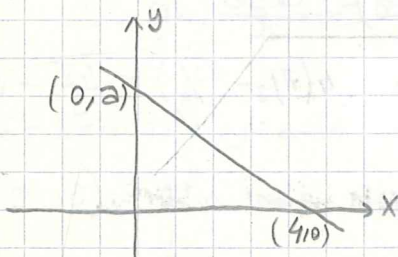
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+f(x))^{1/f(x)} = e$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

7- $A(0, a)$ ve $B(4, 0)$ noktalarından geçen doğrunun alanının 4 br² olması için a ne olmalıdır?

8- $y = x^2 + a$, $y = -x^2 + b$, $(a, b > 0)$ parabollerinin oluşturduğu bölgenin alanının $\sqrt{\frac{b-a}{2}}$ olması için a ile b arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

Çözüm 7 // $\frac{x-x_0}{x_0-x_1} = \frac{y-y_0}{y_0-y_1} \Rightarrow \frac{x-0}{0-4} = \frac{y-a}{a-0} \Rightarrow \frac{x}{-4} = \frac{y-a}{a}$

$\Rightarrow ax = -4y + 4a \Rightarrow x = \frac{-4y + 4a}{a}$



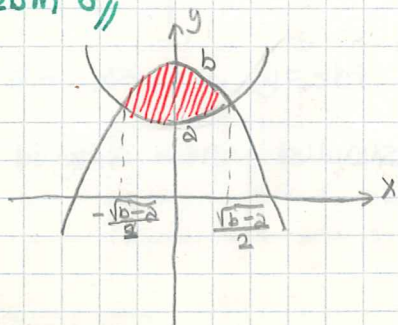
$A = \int_0^a \frac{-4y + 4a}{a} dy = 4 \text{ br.}$

$4 = \frac{1}{a} \left[-2y^2 + 4ay \right]_0^a$

$4 = \frac{1}{a} (-2a^2 + 4a^2)$

$4 = 2a \Rightarrow a = 2 //$

Çözüm 8 //



$A = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b-a}{2}}} [(x^2 + a) - (-x^2 + b)] dx$ $a - b = \frac{3}{4}$
 $= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b-a}{2}}} [2x^2 + (a - b)] dx$

402-5 // $g = a \cdot \sin 3\theta$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g^2 d\theta \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} a^2 \sin^2 3\theta d\theta$$

$$g=0 \Rightarrow a \sin 3\theta = 0 \Rightarrow \sin 3\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$g=a \Rightarrow a \sin 3\theta = a \Rightarrow \sin 3\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/6$$

$$\frac{A}{6} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \sin^2 3\theta d\theta \quad 3\theta = u \Rightarrow 3d\theta = du \Rightarrow d\theta = \frac{du}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \sin^2 u \cdot \frac{du}{3} \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{1}{6} a^2 \int_0^{\pi/6} \sin^2 u du$$

$$\Rightarrow A = a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 2u}{2} du \Rightarrow A = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 2u) du$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^2}{2} \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\pi/6} \Rightarrow A = \frac{a^2}{2} \left(3\theta - \frac{1}{2} \sin 6\theta \right) \Big|_0^{\pi/6}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) = \frac{a^2 \pi}{4} \text{ br}^2 //$$

402-6 // $x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \quad A = \int_{t_1}^{t_2} h(t) g'(t) dt$

$$x=0 \Rightarrow a \cos^3 t = 0 \Rightarrow \cos^3 t = 0 \Rightarrow t_1 = \pi/2$$

$$y=0 \Rightarrow a \sin^3 t = 0 \Rightarrow \sin^3 t = 0 \Rightarrow t_2 = 0$$

$$x = h(t) \quad y = g(t) \text{ dersek,} \quad g'(t) = 3a \sin^2 t \cos t dt$$

$$\frac{A}{4} = \int_{\pi/2}^0 (a \cos^3 t) (3a \sin^2 t \cos t) dt$$

$$= \int_{\pi/2}^0 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t dt$$

$$= 3a^2 \int_{\pi/2}^0 \cos^4 t \sin^2 t dt \quad (\text{Bk. Sayfa 373})$$

$$\frac{A}{4} = 3a^2 \left[\frac{\sin^3 2t}{48} + \frac{t}{16} + \frac{\sin 4t}{64} \right] \Big|_{\pi/2}^0 \Rightarrow A = \frac{3\pi}{8} a^2 \text{ br}^2 //$$

403-3 // $g = 4 \sin \theta, \quad g = 4 \cos \theta$

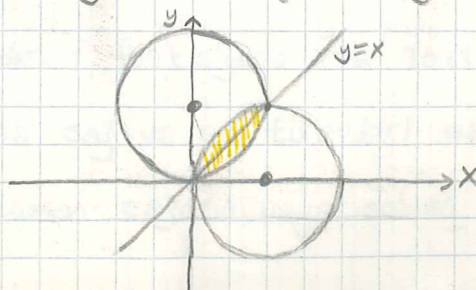
$$g \cdot g = 4g \sin \theta \Rightarrow g^2 = 4g \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$g \cdot g = 4g \cos \theta \Rightarrow g^2 = 4g \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4x = 4y \Rightarrow x = y$$

$$y^2 = 4 - (x-2)^2$$

$$y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$$



$$A = 2 \int_0^2 (x - \sqrt{4 - (x-2)^2}) dx = 2 \int_0^2 x dx - 2 \int_0^2 \sqrt{4 - (x-2)^2} dx$$

$$2 \int_0^2 \sqrt{4 - (x-2)^2} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{4 - (2 \sin t)^2} \cdot 2 \cos t dt$$

$$x-2 = 2 \sin t$$

$$dx = 2 \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^2 \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^2 \sqrt{4(1 - \sin^2 t)} \cdot 2 \cos t dt = 2 \int_0^2 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^2 4 \cos^2 t dt = 8 \int_0^2 \cos^2 t dt = 8 \int_0^2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = 4 \int_0^2 (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 4t + 4 \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^2 = 4t + 2 \sin 2t \Big|_0^2 \Rightarrow$$

$$x-2 = 2 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x-2}{2}$$

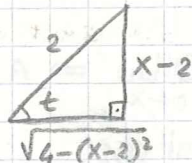
$$t = \arcsin \frac{x-2}{2}$$

$$= \left[4 \arcsin \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2} (x-2) \sqrt{4 - (x-2)^2} \right]_0^2$$

$$= \left(4 \arcsin 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - \left(4 \arcsin(-1) + \frac{1}{2} (-2) \cdot 0 \right)$$

$$= 0 - \left(4 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) = -6\pi$$

$$A = 2 \int_0^2 x dx - 6\pi = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - 6\pi = x^2 \Big|_0^2 - 6\pi = 4 - 6\pi \text{ br}^2 //$$

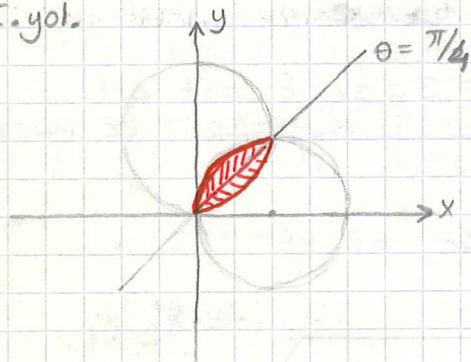


$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$= 2 \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - (x-2)^2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (x-2) (\sqrt{4 - (x-2)^2})$$

II. yol.



$$r = 4 \sin \theta \quad r = 4 \cos \theta$$

$$r^2 = 16 \sin \theta \cos \theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 16 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 16 \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$u = \sin \theta$$

$$du = \cos \theta d\theta$$

$$= 16 \int_0^{\pi/4} u \cdot du$$

$$A = 16 \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\pi/4} \Rightarrow A = 8 u^2 \Big|_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow A = 8 \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/4} = 8 \cdot \frac{2}{4} = 4 \text{ br}^2$$

261 ile ilgili alıştırmalar :

1 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$ ise f 'nin $x=1$ deki türevi nedir?

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Sağ ve sol türevler eşitse fonksiyonun bu noktada türevi vardır.

$x=1$ de fonksiyon sürekli midir? Önce buna bakalım.

$$f(x) = x^2 \quad f(1) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 2-x = 2-1 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

Sağ ve sol limitler eşit olduğundan fonksiyon $x=1$ noktasında sürekli ve türevlenebilir.

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2-x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 //$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2 //$$

Sağ ve sol türevler eşit olmadığı için $x=1$ noktasında türev yoktur.

2 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \leq 1 \\ x^2+x, & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu için $f'(1)$ değerini bulunuz.

$$f(x) = 3x-2 \quad f(1) = 1, \quad f(x) = x^2+x \quad f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x = 1+1 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x-2 = 3-2 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$2 \neq 1$ olduğu için fonksiyon soldan türevlenebilir. (soldan sürekli.)

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3 //$$

Not,, f fonksiyonunun $x=a$ noktasında türevinin olması için ilk koşul,

bu noktada f fonksiyonunun sürekli olması gerekir. Eğer f fonksiyonu $x=a$

noktasında sürekli ve, sağdan ve soldan türevleri eşit ($f'(a^+) = f'(a^-)$)

ise bu takdirde $f'(a)$ türevi vardır. f fonksiyonu $x=a$ noktasında

sürekli ise veya $x=a$ da sürekli ama sağ ve sol türevleri eşit değilse,

bu takdirde $f'(a)$ türevi yoktur. O zaman sağdan veya soldan türev sözkonusu-
dur.

0dev //

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 4 \\ 3-x, & x > 4 \end{cases} \quad \text{ise } f'(-1) = ?$$

3- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = X \cdot \text{sgn}(x-5) = \begin{cases} x, & x > 5 \\ 0, & x = 5 \\ -x, & x < 5 \end{cases}$ fonksiyonu $x=5$ noktasında sürekli olmadığından bu noktada türevi yoktur.

Sürekli olmadığını görelim. (kritik nokta $x=5$ tir.)

$$x=5 \text{ için } f(x) = 0 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -5 \quad \text{sag ve sol limitler esit olmadigi için limit yoktur ve türevli değildir.}$$

Ancak fonksiyon $\mathbb{R} - \{5\}$ noktasında türevlidir.

$$f'(5^+) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x - 5}{x - 5} = 1 //$$

$$f'(5^-) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-x - (-5)}{x - 5} = -1 //$$

$$f'(5^+) \neq f'(5^-) \quad f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 5 \\ -1, & x < 5 \end{cases}$$

4- Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = (x^2 - 7x + 2)^9$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$ c) $f(x) = x - \sqrt[3]{4 - 9x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1} \Rightarrow f'(2) = ?$ e) $f(x) = x^4 - 5x^3 \Rightarrow f'''(x) = ?$

a- $f(x) = (\underbrace{x^2 - 7x + 2}_u)^9 \quad f(x) = u^9 \Rightarrow f'(x) = 9u^8 \cdot u'$

$$f'(x) = 9(x^2 - 7x + 2)^8 (x^2 - 7x + 2)' = 9(x^2 - 7x + 2)^8 (2x - 7)$$

b- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7} = (x^2 - 4x + 7)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 7)^{-1/2} (2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 7}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$$

c- $f(x) = x - \sqrt[3]{4 - 9x^2} = x - (4 - 9x^2)^{1/3}$

$$f'(x) = 1 - ((4 - 9x^2)^{1/3})' = 1 - \frac{1}{3} (4 - 9x^2)^{-2/3} (-18x)$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \sqrt[3]{(4 - 9x^2)^2}} (-18x) = 1 + \frac{6x}{\sqrt[3]{(4 - 9x^2)^2}}$$

d- $f(x) = \frac{x^3}{2x-1} \quad f'(x) = \frac{3x^2(2x-1) - 2(x^3)}{(2x-1)^2} = \frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2} \quad f'(2) = \frac{20}{9} //$

e- $f(x) = x^4 - 5x^3$ $f'(x) = 4x^3 - 15x^2$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x$$

$$f'''(x) = 24x - 30 //$$

5- $f(x) = \sin \underbrace{x^2}_u \cos \underbrace{6x}_v$ $f'(x) = ?$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$$x^2 = u$$

$$6x = v$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

$$(\cos v)' = -\sin v \cdot v' = -\sin 6x \cdot 6 = -6 \sin 6x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin u \cdot \cos v)' = (\sin u)' \cos v + \sin u \cdot (\cos v)' \\ &= 2x \cdot \cos x^2 \cdot \cos 6x + (-6) \sin 6x \cdot \sin x^2 \\ &= 2x \cos x^2 \cos 6x - 6 \sin x^2 \sin 6x // \end{aligned}$$

6- $y = \cos(\underbrace{x^2 - 3x + 21}_u) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = (\cos u)' u' = -\sin u \cdot u' = -\sin(x^2 - 3x + 21)(2x - 3) //$$

7- $y = u^3 - u^2$ $u = \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = ?$

$$y = (\sin x)^3 - (\sin x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \frac{dy}{du} = 3u^2 - 2u \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 2u) \cos x = [3(\sin x)^2 - 2(\sin x)] \cos x$$

$$y' = (3\sin^2 x - 2\sin x) \cos x //$$

8- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 6x + 4$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralığı bulunuz.

Not: fonksiyonun artması ya da azalması fonksiyonun türevinin işaretiyle ilgilidir.

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$

$x < 3$ için fonksiyon azalandır. $x > 3$ için fonksiyon artandır.

9- $y = x^2 + 2x$ fonksiyonuna $x = 1$ de çizilen teğetin eğimi nedir?

$$y' = 3x^2 + 2 \quad f'(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5 //$$

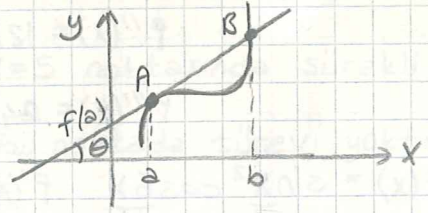
10- $y = (x-1)(x+1)^2$ fonksiyonunu temsil eden eğri üzerinde $x_1 = -2$ ve

$x_2 = 2$ apsisi noktalarından geçen kiris

gözönüne alınıyor. Eğri üzerinde teğetin

eğimi, bu kirisin eğimine eşit olan noktaları

bulunuz?



Bu problemin çözümü, ortalama değer teoreminin uygulamasıdır.

$$m = \tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Not: Teğetin eğimi ile kirisin eğimi eşit olup, o noktadaki teğet, ortalama değer teoremini sağlar.

$$f(b) = f(2) = (2-1)(2+1)^2 = 9$$

$$f(a) = f(-2) = (-3)(-1)^2 = -3$$

$$f'(x) = 1(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f'(c) = 3c^2 + 2c - 1$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 3c^2 + 2c - 1 = \frac{9 - (-3)}{2 - (-2)} \Rightarrow 3c^2 + 2c - 1 = 3$$

$$\Rightarrow 3c^2 + 2c - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 52$$

$$c_1 = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{-2 - \sqrt{52}}{6} //$$

11- Çift fonksiyonun türevinin tek; tek fonksiyonun türevinin çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{tek fonksiyon.} \\ f(-x) = f(x) \Rightarrow \text{çift fonksiyon.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{tek fonksiyon.} \\ f(-x) = f(x) \Rightarrow \text{çift fonksiyon.} \end{array} \right.$$

$$(\text{ödev: } f'(-x) \stackrel{?}{=} -f'(x))$$

$$f \text{ tek} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

$$f(x) = -f(\underbrace{-x}_u) \quad u = -x$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow f(x) = -f(u) \quad \frac{df}{dx} = - \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -f'(u)(-1) \Rightarrow f'(x) = f'(u)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(-x) \quad \text{çift fonksiyondur.}$$

12- Periyodik fonksiyonun türevinin de periyodik fonksiyon olduğunu gösteriniz? $f(x+T) = f(x) \Rightarrow$ fonksiyon periyodiktir.

T : periyod $f'(\underbrace{x+T}_u) = f'(x)$

$$f(x) = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = f'(u) \cdot 1$$

$$f'(x) = f'(u) \Rightarrow f'(x) = f'(x+T) //$$

13- $f(x) = x^2 - 8x + 5$ fonksiyonuna $a=3$ $b=5$ için ortalama değer teoremini uygulayınız.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} // \quad f(b) = f(5) = -10 \quad f(a) = f(3) = -10$$

$$b-a = 5-3 = 2 \quad f'(x) = 2x-8 \quad f'(c) = 2c-8$$

$$2c-8 = \frac{-10 - (-10)}{2} \Rightarrow 4c-16 = 0 \Rightarrow c = 4$$

$$c = a + \theta h // \quad h = b-a // \quad h = 5-3 = 2$$

$$c = 4 = 3 + \theta \cdot 2 \Rightarrow \theta = 1/2$$

14- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}} = ?$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}} \quad x \rightarrow 0^+ \quad \sqrt{2x} \rightarrow 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x}{\sin 2x}} = 1 \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x}} = 1 \cdot \sqrt{1} = 1 //$$

15- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = ?$

$$x \rightarrow 0^+ \quad \cos x \rightarrow 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\sqrt{1+\cos x})}{(\sqrt{1-\cos x})(\sqrt{1+\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+\cos x} = 1 \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos x)} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} //$$

Ödev // $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = ?$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - |x| = ?$

16- $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & -1 \leq x < 0 \end{cases} \text{ veya } x = 1$$

(Önce fonksiyonu düzenliyoruz ve tam değerli fonksiyonu inceliyoruz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor = 1 \quad \text{limiti yoktur.}$$

Ödev,, $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor |x| \rfloor = ?$

Ödev,, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1| + |x| + \lfloor x+1 \rfloor}{x^2 - 1} = ?$

Ödev,, $\lim_{x \rightarrow -2} 2x \cdot |x| \cdot \lfloor x \rfloor = ?$

Ödev,, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\lfloor |x| \rfloor - 2) = ?$

Ödev,, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{\lfloor x \rfloor - 1} = ?$

17- Süreklilik tanımından hareket ederek aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğunu gösteriniz.

a- $f(x) = x^2 + 5$

b- $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$

c- $f(x) = x + 2 \cos x$

c-) $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0$ ise fonksiyon sürekli'dir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} [(x+h) + 2 \cos(x+h)] - [x + 2 \cos x]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} x+h + 2 \cos(x+h) - x - 2 \cos x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 (\cos(x+h) - \cos x) \quad \left[\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 \left(-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h - 4 \left(\sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h - 4 \lim_{h \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} = 0 - 0 = 0 \quad \text{her noktada süreklidir.}$$

18- Aşağıdaki fonksiyonlar x 'in hangi değeri için süreksizdir?

a- $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$

c- $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

b- $f(x) = \frac{1}{x+1}$

d- $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x - 1}$

a) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$ $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

$\{-3,3\}$ de süreksizdir. $\mathbb{R} - \{-3,3\}$ de süreklidir.

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ fonksiyon bu noktada tanımsız olduğundan, bu noktada fonksiyon süreksizdir.

c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ $\sin x = 0$ fonksiyonu sıfır yapan değerler $x = k\pi$ noktalarıdır. $k \in \mathbb{Z}$, fonksiyon $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 'de süreklidir.

d) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x - 1}$ $\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$
 $\{-1,1\}$ de fonksiyon süreksizdir. ($x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$)

19- $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz ve süreksizlik tiplerini yazınız.

$f(x)$ 'in $x=a$ da sürekli olması için,

1-) $f(a)$ da tanımlı olmalı (tanımlı değilse süreksizdir.)

2-) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olmalı (tanımlı ise ve $f(x) \neq f(a)$ ise süreksizdir.)

Esas tipi süreksizlik. Böyle bir soruda fonksiyonu tanımsız yapan noktalar bulunur.

$x_1 = 0$ $x_2 = 1 = 0$, $x_2 = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} + \frac{1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} + \frac{1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 + \frac{1}{x-1} = -1 + \frac{1}{-1} = -2 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Aynı şekilde $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ olduğundan fonksiyon süreksizdir.

20- $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & x < 3 \\ 2x, & x > 3 \end{cases}$ $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x=3$ de sürekli midir?

$x=3$ de tanımlı olmadığı için sürekli değildir, süreksizdir.

21- Aşağıdaki eşitliklerle verilen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların, karşısındaki noktalarda sürekli olduğunu gösteriniz.

a- $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 5 \\ 8-x, & x > 5 \end{cases}, x=5$

b- $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 4 \\ 2x+8, & x \geq 4 \end{cases}, x=4$ (ödev)

c- $f(x) = \begin{cases} 3x-x^2, & x \leq 2 \\ x^2-x, & x > 2 \end{cases}, x=2$ (ödev)

a) $f(x) = x-2 \quad f(5) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} 8-x = 8-5 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x-2 = 5-2 = 3$$

} $x=5$ de sürekli dir.

22- Aşağıdaki fonksiyonların, belirtilen noktalarda süreksiz olduklarını gösteriniz.

a- $f(x) = \begin{cases} \sin x^2 + 3 \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(Sağ ve sol limitlere bakılır ;
eşit değilse süreksizdir.)

b- $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sin(3x + \frac{1}{2}\pi), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23- $y = x^3 + 1$ fonksiyonunun $x=0$ ve $x=1$ noktalarındaki teğetinin denklemini bulunuz ?

$y = f(x)$ 'in (x_0, y_0) noktasındaki teğet denklemini ;

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad m = f'(x_0)$$

$$x=0 \text{ da, } f(0) = 1 = y_0$$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ da, } f(0) = 1 = y_0 \\ f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0 \end{array} \right\} y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1 \text{ doğrusu. //}$$

24- Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

c) $f(x) = \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x$

d) $f(x) = x^2 + \cos 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \sin 2x = 2(1 - \sin 2x)$

31.3.1994 Perşembe - Uygulama //

$$1 - \operatorname{Argch}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}x}{2}}\right) - \frac{x}{2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}x) = x$$

$$\operatorname{ch}x = 2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch}x + 1 = 2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Argch}\left(\sqrt{\frac{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}{2}}\right) - \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Argch}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0 //$$

$$2 - y = \operatorname{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \Rightarrow y' = ?$$

$$\tan\frac{x}{2} = u \Rightarrow y = \operatorname{Argth}u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

3- Aşağıdaki fonksiyonların Taylor Serisi'ne ağırlımını bulunuz.

a) $y = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$

e) $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$

b) $y = \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{4}$

f) $y = \frac{1}{x}, x_0 = -1$

c) $y = \operatorname{ch}x, x_0 = 1$

g) $y = \ln(\cos x), x_0 = \frac{\pi}{3}$

d) $y = \tan x, x_0 = \frac{\pi}{4}$

h) $y = \ln(2-e^x), x_0 = 0$ 3.terime kadar

g- $y = \ln(\cos x) \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$y'' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \quad y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4$$

$$y''' = \frac{-2\sin x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x} \quad y'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8\sqrt{3}$$

$$y^{IV} = \frac{-2\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x} = \frac{-2\cos^2 x - 6\sin^2 x}{\cos^4 x} \quad y^{IV}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -80$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0 + \theta(x-x_0))$$

$$\ln(\cos x) = -\ln 2 - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} - \frac{8\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} - \frac{80\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4}{4!}$$

h- $y = \ln(2-e^x), x_0 = 0$

$$y(0) = \ln(2-e^0) = \ln 1 = 0$$

$$y' = \frac{-e^x}{2-e^x} \Rightarrow y'(0) = -1 \quad y'' = \frac{-2e^x}{(2-e^x)^2} \quad y''(0) = -2$$

$$y''' = \frac{-2e^x(2-e^x)^2 - 4e^{2x}(2-e^x)}{(2-e^x)^4} \quad y'''(0) = -6$$

$$\ln(2 - e^x) = -\frac{x}{1!} - 2\frac{x^2}{2!} - 6\frac{x^3}{3!} - \dots$$

$$= -x - x^2 - x^3 - \dots - x^n - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n //$$

4- Aşağıdaki fonksiyonların, 0 noktası komşuluğunda Taylor açılımını bulunuz.

a- $y = x \cdot e^{\sin x}$

c- $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

e- $y = e^{5x}$

b- $y = e^x \sin x$

d- $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

f- $y = e^{-2x}$

a) $y = x e^{\sin x} \quad y(0) = 0$

$$y' = e^{\sin x} + x \cos x e^{\sin x} \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = e^{\cos x} + \cos x e^{\sin x} - x \sin x e^{\sin x} + x \cos^2 x e^{\sin x}$$

$$= 2 \cos x e^{\sin x} - x \sin x e^{\sin x} + x \cos^2 x e^{\sin x} \quad y''(0) = 2$$

$$y''' = -2 \sin x \cdot e^{\sin x} + 2 \cos^2 x e^{\sin x} - \sin x e^{\sin x} - x \cos x e^{\sin x}$$

$$- x \sin x \cos x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} - 2x \sin x \cos x e^{\sin x} + x \cos^3 x e^{\sin x}$$

$$y'''(0) = 3 \quad y^{IV}(0) = 4 \quad y^V(0) = 5$$

$$x e^{\sin x} = \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \dots + \frac{n x^n}{n!} + \dots$$

$$= \frac{x}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

Limitlerle İlgili Uygulama = (L'Hospital)

1- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^2 - \sin x} = ? \quad \frac{0}{0}$ belirsizlik. (L'Hospital'den)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{2x - \cos x} = \frac{2}{0-1} = -2 //$$

4- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x - x} = ?$

2- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} = ? \quad \frac{0}{0}$ belirsizlik.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} //$$

5- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^4} = ?$

6- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4} = ?$

3- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = ? \quad \frac{0}{0}$ belirsizlik

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1 //$$

7- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} qx} = ?$

8- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = ?$

Limitlerde Belirsizlikler : $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$ (Bk.S:351)

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (f(a)=\infty, g(a)=\infty)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} = \frac{0}{0}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa, $\frac{0}{0}$ haline getirmeden L'Hospital, kurah uygulanabilir.

9- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{\cot(x-2)} = ? \quad \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği.

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-1}{\sin^2(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sin^2(x-2)}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2 \sin(x-2) \cos(x-2)}{1} = \frac{0}{1} = 0 //$$

10- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^3} = ? \quad \frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6x} = \frac{2}{\infty} = 0 //$$

11- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3} = ? \quad \frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}+2x}{e^x+3x^2} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}+2}{e^x+6x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8e^{2x}}{e^x+6} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 16e^x = \infty //$$

12- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)} = ?$

13- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x^2} = ?$

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği varsa, $(f(a)=0, g(a)=\infty)$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ veya } \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \text{ sekline dönüştürülür.}$$

14- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x = ? \quad 0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0 //$$

$$15 - \lim_{x \rightarrow 2} (a^2 - x^2) \tan \frac{\pi}{2a} x = ? \quad 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a^2 - x^2}{\tan \frac{\pi}{2a} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x}{\frac{-\pi/2a}{\sin^2 \frac{\pi}{2a} x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x \sin^2 \frac{\pi}{2a} x}{\pi/2a} = \frac{2a}{\pi/2a} = \frac{4a^2}{\pi} //$$

$$16 - \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x = ? \quad 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{3} = 0 //$$

$$17 - \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x+3}{x-3} = ?$$

$$18 - \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-2x} = ?$$

• $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$ belirsizliği varsa $(f(a) = \infty, g(a) = \infty)$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \frac{0}{0} \text{ sekline dönüştürülür ve L'Hospital uygulanır.}$$

$$19 - \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = ? \quad \infty - \infty$$

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{1}{x/x-1} - \frac{1}{1/\ln x}}{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{x-1}} = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{\frac{x-1(\ln x)}{x}} = \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln x - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x - 1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2} //$$

$$20 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^x \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{x}{x-1}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}} \right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1}} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)} = \frac{1}{e} \cdot 1 = e^{-1} //$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x = e^{-1} //$$

$$21- \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = ? \quad \frac{1}{x} = u \Rightarrow x \rightarrow 0, u \rightarrow \infty$$

$$x = \frac{1}{u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e //$$

$$22- \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = ? \quad x \rightarrow \infty \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \left(\frac{1}{1+0}\right)^\infty = 1^\infty \text{ belirsizliği}$$

$$y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{1+1/x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1/x^2 + 1}{x/x+1}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x(x+1)}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-1}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \ln y = -1 \quad y = e^{-1} = \frac{1}{e} //$$

$$23- \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = ?$$

Türevle İlgili Uygulama: (Logaritmik Fonksiyon Türevleri)

$$1- y = \log \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow y' = ? \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad y = \log u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y' = \frac{\frac{\sin x (1+\cos x) + \sin x (1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}}{2 \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} = \frac{\frac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2}}{2 \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$$

$$= \frac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2 \cdot 2 \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2 \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x} //$$

$$2- y = \log \left(\sin \frac{x}{2}\right) \Rightarrow y' = ?$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} //$$

$$3- y = \log(x^2 + y^2) + 4 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} \Rightarrow y' = ?$$

$$4- y = e^{1/x} \Rightarrow y' = e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$5- y = x^x \Rightarrow y' = ?$$

$$6- y = e^{ax} \Rightarrow y' = a \cdot e^{ax}$$

$$7- y = e^{\sin^2 x} \Rightarrow y' = 2 \sin x \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$$

$$8- y = \frac{1}{10} e^{-x} (3 \sin 3x - \cos 3x) \quad y' = ?$$

$$9- y = \ln y \left(\cos \frac{x-1}{x} \right) \quad y' = ?$$

$$10- y = x^{\log \sqrt{x}} \quad y' = ?$$

$$11- y = (\sin x)^{e^x} \quad y' = ?$$

$$12- y = \frac{m}{2} \log(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} \quad y' = ?$$

$$13- y = \log \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{\sin x} \quad y' = ?$$

Integral ile ilgili Uygulama: (Bk. S:370 21.4.94 Perşembe)

$$a) \int (6-5x^3)^{10} x^2 dx = ?$$

$$u = 6-5x^3 \quad du = -15x^2 dx \quad -\frac{du}{15} = x^2 dx$$

$$= \int (u)^{10} \frac{-du}{15} = -\frac{1}{15} \frac{u^{11}}{11} + c = -\frac{1}{165} \cdot (6-5x^3)^{11} + c //$$

$$b) \int \frac{\ln x}{x} dx = ?$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c \quad (\ln x)^2 \neq \ln x^2 //$$

$$c) \int x \sqrt{3-x^2} dx = ?$$

$$3-x^2 = u \quad du = -2x dx \quad -\frac{du}{2} = x dx$$

$$= \int \sqrt{u} \cdot -\frac{du}{2} = -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du = -\frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3} (3-x^2)^{3/2} + c //$$

$$d) \int x e^{-x} dx = ?$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$e^{-x} dx = dv \quad u = x$$

$$= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$-e^{-x} = v \quad du = dx$$

$$= e^{-x} (-x+1) + c //$$

$$e - \int x^2 e^{-x} dx = ?$$

$$f - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = ? \quad \frac{1}{x^2+1} = u \Rightarrow du = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx \quad dv = dx \quad x = v$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} \cdot x - \int x \cdot \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+1)^2} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow 3 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{3(x^2+1)} + \frac{2}{3} \arctan x + c //$$

$$g - \int \frac{k dx}{(ax+b)^n} = \frac{k}{a(1-n)} \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{(x-5)^4} = ? = \frac{1}{(1-4)} \cdot \frac{1}{(x-5)^3} = -\frac{1}{3(x-5)^3} + c //$$

$$h - \int \frac{x+9}{x^2-9} dx = \int \frac{x+9}{(x-3)(x+3)} dx = ?$$

$$\frac{x+9}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$x+9 = (A+B)x + 3(A-B) \quad A=2 \quad B=-1$$

$$\int \frac{x+9}{x^2-9} dx = \int \frac{2}{x-3} dx - \int \frac{1}{x+3} dx = 2 \ln|x-3| - \ln|x+3| + c //$$

$$1) \int \frac{x^3+x^2+x-5}{x+1} dx = ? \quad \begin{array}{r|l} x^3+x^2+x-5 & x+1 \\ \hline 7x^3+7x^2 & 7x^2+7x-5 \\ \hline x-5 & x-5 \\ \hline 7x+7 & -6 \end{array} \quad x^2+1 - \frac{6}{x+1}$$

$$= \int \left(x^2+1 - \frac{6}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x - 6 \ln|x+1| + c //$$

$$j) \int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x} = \int \frac{dx}{x(x^2+5x+4)} = \int \frac{dx}{x(x+1)(x+4)} = ?$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+4}$$

$$A(x+1)(x+4) + B(x+4)x + Cx(x+4) = 1$$

$$A = 1/4 \quad B = -1/3 \quad C = 1/12$$

$$\int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{12} \ln|x+4| + c$$

Soru // (Kutupsal Koordinatlarla ilgili)

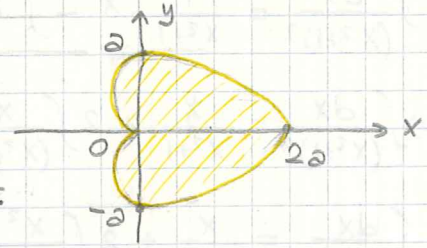
$\rho = a(1 + \cos \theta)$ grafiğini çiziniz?

Periyot: 2π $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ kutup eksenine simetriktir.

$[-\pi, \pi]$, $[0, \pi]$

$$\rho' = -a \sin \theta \leq 0$$

θ	0	$\pi/2$	π
ρ'	-	-	-
ρ	$2a$	a	0



$\rho(\theta) = \rho(\pi - \theta)$ ise y eksenine göre simetriktir.

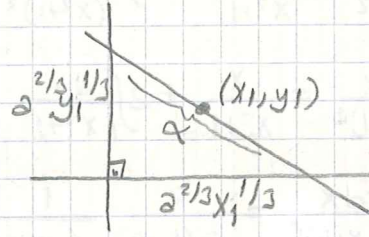
$\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ ise x eksenine göre simetriktir.

Soru // (Bk.S:364 Benzeri)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} y' = 0 \quad (\text{türevi})$$

$$-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = y' \quad (x_1, y_1) \text{ herhangi noktalar.}$$



$$m = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} \quad y - y_1 = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} (x - x_1)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{y_1 x_1^{1/3}}{y_1^{1/3}} = x - x_1 \quad y_1^{2/3} x_1^{1/3} + x_1 = x$$

$$x = x_1^{1/3} (x_1^{2/3} + y_1^{2/3}) = a^{2/3} x_1^{1/3} \quad \text{benzer şekilde}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = a^{2/3} y_1^{1/3}$$

$$\alpha^2 = a^{4/3} y_1^{2/3} + a^{4/3} x_1^{2/3} \Rightarrow \alpha^2 = a^{4/3} (x_1^{2/3} + y_1^{2/3})$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = a^{4/3} \cdot a^{2/3} = a^2 \Rightarrow \alpha = a //$$

Soru // (Hiperbolik fonksiyonlarla ilgili, Bk: S:341)

$$y = \text{Argth } x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x} \quad \text{olduğunu gösteriniz.}$$

$$\Rightarrow x = \text{th } y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\Rightarrow x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \Rightarrow 2y = \ln \frac{x+1}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x} //$$

Soru // $y = \text{Argcoth } x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ olduğunu gösteriniz.

$$\Rightarrow x = \text{coth } y = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}$$

$$\Rightarrow x(e^{2y} - 1) = e^{2y} + 1 \Rightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow 2y = \ln \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} //$$

Soru // $y = \text{Argsh} X = \ln(X + \sqrt{X^2 + 1})$ olduğunu gösteriniz.

$$y = \ln(X + \sqrt{X^2 + 1}) \Rightarrow y' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad y = \text{Argsh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 + 1}}}{X + \sqrt{X^2 + 1}} = \frac{\sqrt{X^2 + 1} + X}{(X + \sqrt{X^2 + 1})(\sqrt{X^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + 1}}$$

$$y = \text{Argsh} X \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{X^2 + 1}} \Rightarrow y = \text{Argsh} X = \ln(X + \sqrt{X^2 + 1}) //$$

394-6 // $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} = ?$

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x-2)(x-1)$$

$x=1$ ve $x=2$ de fonksiyon tanımsızdır.

$$-x^2 + 3x - 2 = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\int_{1+\epsilon_1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} + \int_{3/2}^{2-\epsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sin t$$

$$dx = \frac{1}{2} \cos t dt$$

$$= \int_{1+\epsilon_1}^{3/2} \frac{\frac{1}{2} \cos t dt}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 - \sin^2 t)}} + \int_{3/2}^{2-\epsilon_2} \frac{\frac{1}{2} \cos t dt}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 - \sin^2 t)}}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon_1}^{3/2} dt + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{3/2}^{2-\epsilon_2} dt = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} t \Big|_{1+\epsilon_1}^{3/2} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} t \Big|_{3/2}^{2-\epsilon_2}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \frac{3}{2} - (1 + \epsilon_1) + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} (2 - \epsilon_2) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - (1 + 0) + (2 - 0) - \frac{3}{2} = -1 + 2 = 1 //$$

358/h - (Bezer sekilde yapılışı.)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (3 + 2e^{\tan x})^{\pi - 2x} = ?$$

$$y = (3 + 2e^{\tan x})^{\pi - 2x} \Rightarrow \ln y = (\pi - 2x) \ln(3 + 2e^{\tan x})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x) \ln(3 + 2e^{\tan x}) = 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(3 + 2e^{\tan x})}{\frac{1}{(\pi - 2x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{2 \sec^2 x e^{\tan x}}{3 + 2e^{\tan x} \cdot 2}}{\frac{2}{(\pi - 2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \sec^2 x e^{\tan x} (\pi - 2x)^2}{2(3 + 2e^{\tan x})} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\pi - 2x)^2}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\tan x}}{3 + 2e^{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-4(\pi - 2x)}{-\sin 2x} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x e^{\tan x}}{2 \sec^2 x e^{\tan x}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-8}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\ln y = 2 \Rightarrow y = e^2 //$$

(S: 321 'den devam) : **Trigonometrik Fonksiyonlar**

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = ((1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha}$$

Dönüşüm Formülleri :

1- Çarpımın Toplana Dönüşüm Formülleri :

a) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ olduğunu gösteriniz.

$$2\sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2\sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

b) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

c) $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

d) $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

2- Toplının Çarpıma Dönüşüm Formülleri :

a) $\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta \\ B &= \alpha - \beta \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} A+B &= 2\alpha \\ A-B &= 2\beta \end{aligned} \right\} \quad \alpha = \frac{A+B}{2} \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2(\cos \alpha \sin \beta)$$

$$= 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

b) $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

c) $\sin A - \cos B =$

d) $\cos A - \sin B =$

Örnekler :

• $\sin 75^\circ = ?$

$\sin 75 = \sin (30+45)$

$= \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

• $\cos 15^\circ = ?$

$\cos 15 = \cos (60-45)$

$= \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

• $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ ifadesini sadeleştiriniz.

$= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + (2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1)} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} //$

• $\sin 50^\circ - \sin 40^\circ = ?$

$= 2 \cos 45^\circ \sin 5^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5^\circ = \sqrt{2} \cdot \sin 5^\circ$

• $\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 4x - \cos 2x} = ?$

$= \frac{2 \cos 3x \sin x}{-2 \sin 3x \sin x} = -\cot 3x$

Trigonometrik Denklemlerin Çözümleri

• $\cos x = 0$ ifadesinde x değerini bulunuz? (Denklemin çözüm kümesi nedir?)

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{Ç.K.} = \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

• $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Ç.K.} = ?$

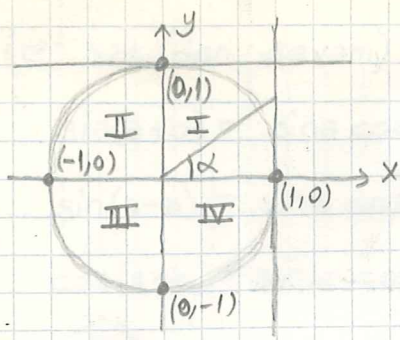
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{Ç.K.} = \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\} \text{ veya}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \vee \cos (2\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\text{Ç.K.} = \{x \mid x = (2\pi - \frac{\pi}{3}), k \in \mathbb{Z}\}$

• $\tan x = -1 \quad \text{Ç.K.} = ?$

$x = \pi - \frac{\pi}{4} \text{ ve } x = (2\pi - \frac{\pi}{4}) \quad \text{Ç.K.} = \{x \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$



$$\tan \frac{\pi}{2} = \infty \quad \tan 0 = 0 \quad \tan \frac{3\pi}{2} = \infty$$

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad |\sin \theta| \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad |\cos \theta| \leq 1$$

Soru,, $f(\theta) = (3 - \cos \theta)(5 + \cos \theta)$ ise $f(\theta)$ nin en büyük ve en küçük değeri nedir?

$$f(\theta) = (3 - 1)(5 + 1) = 12 \text{ en büyük}$$

$$f(\theta) = (3 - (-1))(5 - 1) = 16 \text{ en küçük}$$

Soru,, $\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x} = ?$

$$= \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

$$\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} = ? = \frac{\sin 25}{\sin 25} = 1 //$$

Bölgelere Düşen Esas Ölçülerin Her Açılar Cinsinden Trigonometrik Oranları

Ölçüsü x olan açının trigonometrik oranları

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot 240^\circ = \frac{\cos 240^\circ}{\sin 240^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} //$$

Farkları $\pi/2$ radyan veya 90° olan açılarn trigonometrik oranları

α dar açı olmak üzere ;

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(90^\circ + \alpha) = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ + \alpha) = \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

Soru // $\frac{\sin 100^\circ}{\sin 10^\circ} = ? = \frac{\sin(90+10)}{\sin 10} = \frac{\cos 10}{\sin 10} = \cot 10^\circ //$

Soru // $\frac{\cos 110}{\cos 20} = ? = \frac{\cos(90+20)}{\cos 20} = \frac{-\sin 20}{\cos 20} = -\tan 20^\circ //$

Soru // $\sin X + \sin y = 2 \sin \frac{X+y}{2} \cos \frac{X-y}{2}$ olduğunu gösteriniz?

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a+b \\ y = a-b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{x+y}{2} \quad x+y=2a \\ b = \frac{x-y}{2} \quad x-y=2b \end{array}$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \quad \text{--- (1)}$$

$$\sin X + \sin y = 2 \sin \frac{X+y}{2} \cos \frac{X-y}{2} \quad \text{toplamanı çarpıma dönüşümü}$$

① ifadesinden, $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ yazılır.

(S: 308 ile ilgili alıştırmalar :) (Diziler)

1- Aşağıda genel terimleri verilen dizileri inceleyerek, karakterlerini inceleyiniz.

a) $a_n = \left(\frac{2n+1}{-3n+1} \right)$ b) $a_n = (3n+2)$ c) $S_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ d) $S_n = n! (-1)^n$

a- $a_n = \left(\frac{2n+1}{-3n+1} \right)$

i- Bu dizinin artan olup olmadığını görelim.

$$a_{n+1} > a_n \Rightarrow \text{artandır.} \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$a_{n+1} < a_n \Rightarrow \text{azalandır.} \Rightarrow a_n - a_{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$$

$$a_n = \frac{2n+1}{-3n+1} = -\frac{2n+1}{3n-1}$$

$$a_n = -\left(\frac{2n+1}{3n-1} \right) = -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n-1)} \right)$$

$$\begin{array}{r} 2n+1 \quad | \quad 3n-1 \\ +2n+2 \quad | \quad 2 \\ \hline 5 \quad | \quad 2 \end{array}$$

$$a_{n+1} = -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3(n+1)-1)} \right) = -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)} \right)$$

$$\frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n+2} \Rightarrow \frac{5}{3(3n-1)} > \frac{5}{3(3n+2)} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n-1)} > \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n-1)} \right) < -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)} \right) \quad \text{artandır.}$$

ii - Dizinin sinirliligini arastiralim.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < M \quad M > 0$$

$$-M \leq a_n \leq M \Rightarrow \text{sinirlidir.}$$

$$a_n = -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n-1)}\right) \quad 0 < \frac{1}{3n-1} \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3n-1} \cdot \frac{5}{3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n-1)} \leq \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} > -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n-1)}\right) \geq -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq a_n < -\frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (a_n) \text{ sinirli bir dizidir.}$$

$$Eküs(a_n) = -\frac{2}{3} \quad Ebas(a_n) = -\frac{3}{2}$$

(a_n) dizisi hem alttan, hem üstten sinirli olduğu için yakınsaktır.

$$\lim (a_n) = -\frac{2}{3} = Eküs(a_n) //$$

Ödev // s_n = $\left(\frac{3n+2}{5-4n}\right)$ dizisini inceleyerek karakteri hakkında bilgi veriniz.

$$b- a_n = (3n+2) \quad a_{n+1} = (3(n+1)+2) = (3n+5)$$

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{veya} \quad a_{n+1} - a_n > 0$$

$$3n+5 - 3n+2 > 0 \Rightarrow 3 > 0 \quad \text{artandır.}$$

a_n = 3n+2 dizisi üstten sinirli değildir. İraksak bir dizidir.

$$c- s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad 1 - \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}$$

Bu dizi için iki durum vardır.

i - n çift ise, n = 2k k ∈ ℕ,

$$s_{2k} = 1 + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \quad s_{2(k+1)} = s_{2k+2} = 1 + \frac{1}{2k+2}$$

$$\frac{1}{2k} > \frac{1}{2k+2} \Rightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{2k}}_{s_{2k}} > \underbrace{1 + \frac{1}{2k+2}}_{s_{2k+2}}$$

s_{2k} > s_{2k+2} olduğundan dizi azalandır.

sınırlılığı: $0 < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \rightarrow 0$

$$1 < \underbrace{1 + \frac{1}{2k}}_{S_{2k}} \leq \frac{3}{2}$$

alttan sınırlı bir dizedir, yakınsaktır.

$$E_{\text{bas}}(s_n) = 1 \quad E_{\text{küs}}(s_n) = \frac{3}{2}$$

ii - $n = 2k-1$ tek sayı olması, $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{2k-1} = S_{2k-1}$$

$$S_{2(k+1)-1} = S_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$$

$$\frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k+1} \Rightarrow -\frac{1}{2k-1} < -\frac{1}{2k+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2k-1} < 1 - \frac{1}{2k+1}$$

Sınırlılığı:

$$\underbrace{S_{2k-1}}_{a_n} < \underbrace{S_{2k+1}}_{a_{n+1}}$$

artandır.

$$0 < \frac{1}{2k-1} \leq 1 \Rightarrow 0 > -\frac{1}{2k-1} \geq -1$$

$$\Rightarrow 1 > 1 - \frac{1}{2k-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{2k-1} < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_{2k-1} < 1 \text{ sınırlı bir dizedir.}$$

artan ve üstten sınırlı olduğu için yakınsaktır. $\lim(s_n) = 1$ $E_{\text{bas}} = 0$ $E_{\text{küs}} = 1$

d- $a_n = n!(-1)^n$

i- $n = 2k \Rightarrow a_{2k} = 2k!(-1)^{2k} = 2k!$

$$a_{2(k+1)} = (2k+2)!(-1)^{2k+2} = (2k+2)! \quad \left. \begin{array}{l} a_{2k+2} > a_{2k} \\ (2k+2)! > 2k! \end{array} \right\}$$

Herhangi bir sayıdan küçük kalmadığından dizi artandır, üstten sınırlı değildir, ıraksaktır.

ii- $n = 2k-1 \Rightarrow a_{2k-1} = (2k-1)!(-1)^{2k-1} = -(2k-1)!$

$$a_{2(k+1)-1} = a_{2k+1} = -(2k+1)!$$

$$-(2k+1)! < -(2k-1)!$$

$a_{2k+1} < a_{2k-1}$ dizi azalandır, alttan sınırlı değildir, ıraksaktır.

Not: a_{2k} ve a_{2k-1} dizileri a_n dizisinin alt dizileridir ve bu alt diziler ıraksak olduğundan dizi de ıraksaktır.

Ödev,, $S_n = \frac{n!(2n+1)}{(n+1)!}$ dizisini inceleyerek, karakterini belirtiniz.

yol gösterme: $\frac{n!(2n+1)}{n!(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$

Ödev,, $S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ dizisini inceleyerek, karakterini belirtiniz.

yol gösterme: Paydanın eşleniğiyle pay ve paydayı çarpalım.

2- $S_1 = 1$ olmak üzere genel terimi $S_n = \sqrt{1 + S_{n-1}}$ eşitliğiyle verilen dizinin limitini bulunuz?

S_{n-1} dizisi S_n dizisinin alt dizisidir. Yakınsak bir dizide, dizinin limitiyle alt dizilerin limitleri eşittir.

$$\lim S_n = \lim \sqrt{1 + S_{n-1}}$$

Kabul edelim ki, $\lim S_n = S$ olsun,

$$\lim S_n = \lim \sqrt{1 + S_{n-1}} = S$$

$$= \sqrt{\lim 1 + S_{n-1}} = \sqrt{\lim 1 + \lim S_{n-1}} \Rightarrow S = \sqrt{1 + S}$$

$$\Rightarrow S^2 = 1 + S \Rightarrow S^2 - S - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$S_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\lim S_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} //$$

negatif olanaz

Ödev,, $S_1 = 1$ ve $S_n = \frac{1}{S_1 + S_{n-1}} \Rightarrow \lim S_n = ?$

3- $(a_n) \rightarrow 4$ ise $((a_{2n})^2 - a_{n+2} + 3)$ $\lim = ?$

$$\lim a_n = 4 \Rightarrow \text{yakınsaktır.}$$

(a_{2n}) ve (a_{n+2}) dizileri a_n dizisinin alt dizileridir.

$$\lim a_{2n} = 4 = \lim a_{n+2}$$

$$\lim ((a_{2n})^2 - a_{n+2} + 3) = (\lim a_{2n})^2 - \lim a_{n+2} + \lim 3 = 4^2 - 4 + 3 = 15 //$$

Ödev,, 1- $(a_n) \rightarrow 2$ $(b_n) \rightarrow -1$ $(c_n) = \left(\frac{3(a_n) + (b_n)^2}{1 - (a_n)(b_n)} \right) \Rightarrow \lim c_n = ?$

2- $(a_n) = \frac{3}{n}$ $b_n = \frac{1}{6n}$ $(a_n + b_n) \rightarrow ?$

3- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{2n + 1} = ?$

4- Aşağıdaki dizilerin yakınsak veya ıraksak olduğunu bulunuz.

a- $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

b- $(-1)^n \frac{n}{2n+1}$

c- $(-1)^n \frac{1}{n}$

d- $8-2n$

a- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2} //$
 0 yakınsak.

b- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1}$

$n \text{ tek} \Rightarrow (-1)^n = -1$ $n \text{ çift} \Rightarrow (-1)^n = 1$

$n \text{ tek} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(2+\frac{1}{n})} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$n \text{ çift} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(2+\frac{1}{n})} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

limitler eşit olmadığından dizi ıraksaktır.

c- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 $\swarrow \searrow$
 $+1 \text{ veya } -1$

$n \text{ tek} \Rightarrow (-1)^n = -1$ $n \text{ çift} \Rightarrow (-1)^n = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0 //$

Her iki durumda da limit sıfır olur. Yakınsak dizidir.

d- $\lim_{n \rightarrow \infty} (8-2n) = 8-2 \cdot \infty = \infty$ ıraksak dizidir. //